CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Eliminazione dei quantificatori per il campo dei numeri reali con le funzioni analitiche ristrette

Tesi di Laurea Triennale

CANDIDATO:
Alessandro Sferlazza

RELATORE:
Prof. **Alessandro Berarducci**

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Con la presente tesi, intendiamo studiare alcune interessanti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, con rilevanza in geometria algebrica e analisi, ma tramite un approccio model-teoretico.

Diciamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è semialgebrico se si scrive come unione finita di soluzioni di sistemi di equazioni e disequazioni polinomiali. La famiglia degli insiemi semialgebrici è stata abbastanza studiata in geometria algebrica reale. Per una trattazione generale si rimanda a [3]. Un teorema classico a riguardo è il Teorema di Tarski-Seidenberg, che afferma che i semialgebrici sono stabili per proiezioni su alcune coordinate. Siamo interessati a darne una dimostrazione, ma utilizzando tecniche di teoria dei modelli.

Parallelamente, ci occupiamo di un'altra famiglia di sottinsiemi interessanti. Diciamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è semianalitico se, localmente, è un'unione finita di soluzioni di sistemi di equazioni e disequazioni che coinvolgono funzioni analitiche. Un sottoinsieme si dice invece subanalitico se localmente si scrive come proiezione di un insieme semianalitico limitato. Dei risultati relativi a questi insiemi sono stati sviluppati inizialmente negli anni Sessanta, ad opera di Gabrielov [4] e Łojasiewicz [5], nell'ambito della geometria analitica reale.

Un importante risultato di Gabrielov (1968) è che la famiglia degli insiemi subanalitici è stabile per passaggio al complementare. Riusciremo a dare una dimostrazione alternativa di quest'ultimo fatto studiando, al posto degli insiemi stessi, una teoria in un linguaggio del primo ordine che possa interpretare le funzioni analitiche che servono a definire gli insiemi in questione. La teoria sarà T_{an}, formulata in un linguaggio che contiene un simbolo per ogni funzione analitica reale, purché ristretta ad un cubo compatto contenuto nel suo dominio di convergenza. Analogamente, per i semialgebrici utilizzeremo la teoria T_{RCF} costituita dagli enunciati verificati da $\mathbb{R}$ nel linguaggio dei campi ordinati $\mathcal{L}_{\text{or}} = \{+, \cdot, -, 0, 1, <\}$.

L'obiettivo della tesi è mostrare che le teorie studiate ammettono la possibilità di semplificare molto le formule al loro interno liberandosi di tutti i quantificatori, o quasi. In particolare, T_{RCF} ammette l'eliminazione completa dei quantificatori (EQ), mentre T_{an} ci si avvicina con la model-completezza: cioè tutte le sue formule hanno una forma equivalente con soli quantificatori esistenziali. Per dimostrare quest'ultimo fatto useremo comunque un risultato intermedio di EQ.

Nel primo capitolo introdurremo gli strumenti logici necessari a parlare di EQ e a lavorare con teorie del primo ordine. Introdurremo un test che permette di dimostrare l'eliminazione dei quantificatori per una teoria studiando le immersioni tra i suoi modelli, secondo la nota tecnica model-teoretica del "va-e-vieni".

Nel secondo e terzo capitolo, utilizzeremo questo criterio per dimostrare l'eliminazione dei quantificatori di T_{RCF} e la model-completezza di T_{an}, seguendo l'approccio di Wilkie in [7]. Il risultato su T_{RCF}, classico, è stato dimostrato originariamente da Tarski e da lì rielaborato più volte. Lo studio di T_{an} invece segue un'idea originariamente presentata da Denef e van den Dries (1988) in [1], che per primi hanno utilizzato l'eliminazione dei quantificatori per ottenere risultati geometrici sugli insiemi subanalitici di $\mathbb{R}^n$. Tale idea è stata poi rielaborata da Wilkie in una dimostrazione basata sul test per EQ menzionato sopra.

Infine, nell'ultimo capitolo, espliciteremo il collegamento tra le famiglie di insiemi introdotte sopra e le loro descrizioni in formule. Vedremo come dall'eliminazione dei quantificatori segue innanzitutto il risultato di Gabrielov sui complementari di insiemi subanalitici, e otterremo altresì risultati geometrici di finitezza degli insiemi definibili nelle teorie studiate. Mostreremo l'o-minimalità del campo reale con le funzioni algebriche (rispettivamente analitiche ristrette): ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definibile tramite funzioni algebriche (risp. analitiche ristrette) ha un numero finito di componenti connesse. Inoltre, vedremo che ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definibile ha crescita al più polinomiale a $+\infty$. Per quest'ultimo capitolo, le fonti principali includono [2] e [6].

Capitolo 1

Definizioni e risultati preliminari

Definizione 1.1. Si dice *linguaggio del primo ordine* il dato di un insieme di simboli $\mathcal{L} = \mathcal{L}_c \sqcup \mathcal{L}_f \sqcup \mathcal{L}_r$ e una funzione $\mathrm{ar}\colon \mathcal{L}_f \cup \mathcal{L}_r \to \mathbb{N}$, dove:

- i simboli $k \in \mathcal{L}_c$ si dicono *simboli di costante*,
- i simboli $g \in \mathcal{L}_f$ si dicono *simboli di funzione*; $n = \mathrm{ar}(g)$ è detta *arietà* di g, ed g è un simbolo di funzione n-aria.
- i simboli $P \in \mathcal{L}_r$ si dicono *simboli di relazione*, ognuno con la sua arietà $\mathrm{ar}(P)$.

Possiamo pensare all'arietà di un simbolo di funzione (o relazione) come il numero di argomenti della funzione (relazione) corrispondente. Per semplicità, indichiamo il linguaggio come una lista di simboli, di cui specifichiamo la categoria a cui appartengono e l'arietà.

Esempio 1.2. Il linguaggio su cui ci concentreremo maggiormente nella nostra discussione sarà il linguaggio degli anelli ordinati $L_{\mathrm{or}} = (+, -, \cdot, 0, 1, <)$, dove, come nell'uso comune, $+$ e $\cdot$ sono simboli di funzione binaria (cioè di arietà 2), $-$ funzione unaria, $0, 1$ costanti e $<$ relazione binaria.

Definizione 1.3. Fissiamo un linguaggio L. Si dice L-struttura $\mathcal{M}$ il dato di:

- Un insieme M, detto *dominio* della struttura.
- Per ogni simbolo di costante $c \in \mathcal{L}_c$, un elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$.
- Per ogni simbolo di funzione $f \in \mathcal{L}_f$, una funzione $f^{\mathcal{M}}\colon M^{\mathrm{ar}(f)} \to M$.

- Per ogni simbolo di relazione $R \in \mathcal{L}_r$, un sottoinsieme $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{\mathrm{ar}(R)}$. Possiamo pensare R come il sottoinsieme costituito dagli elementi che "verificano la relazione" R.

Gli oggetti $c^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}$ si dicono *interpretazioni* dei rispettivi simboli.

Esempio 1.4. Continuando l'esempio precedente, una $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-struttura con cui ci interesserà lavorare è $\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$, dove i simboli sono interpretati in maniera naturale ($-^{\mathbb{R}}$ è la funzione unaria che manda ogni numero reale nel suo opposto).

Nota. Spesso, per semplicità, confonderemo una struttura $\mathcal{M}$ con il suo dominio M, quando non ci sarà ambiguità. Inoltre, scriveremo semplicemente c, f, R al posto di $c^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}$.

Definizione 1.5. Siano $\mathcal{L}$ un linguaggio, $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura. Una struttura $\mathcal{N}$ si dice *sottostruttura* di $\mathcal{M}$, e scriveremo $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, se:

- $N \subseteq M$,
- per ogni $c \in \mathcal{L}_c$, si ha $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$,
- per ogni simbolo n-ario $f \in \mathcal{L}_f$, si ha $f^{\mathcal{N}} = f^{\mathcal{M}}|_{N^n}$,
- per ogni simbolo di relazione n-aria $R \in \mathcal{L}_r$, si ha $R^{\mathcal{N}} = R^{\mathcal{M}} \cap N^n$.

Esempio 1.6. Se $\mathcal{M} = (M, +, \cdot, -, 0, 1, <)$ è un anello ordinato, allora (tramite questi stessi simboli) è una $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-struttura. Le $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-sottostrutture di $\mathcal{M}$ sono esattamente i sottoanelli di $\mathcal{M}$, con l'ordine e le operazioni indotte, in quanto devono contenere $0, 1$ ed essere chiuse per le operazioni $+, \cdot, -$.

Definizione 1.7. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$, e sia $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ un insieme contenente numerabili variabili distinte.
Definiamo l'insieme dei *termini* di $\mathcal{L}$ come il più piccolo insieme $\mathcal{T}$ tale che:

- $\mathcal{L}_c \cup V \subseteq \mathcal{T}$,
- se $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ e f è un simbolo di funzione n-ario, allora $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Per indicare $t \in \mathcal{T}$, scriveremo a volte $t(x_1, \dots, x_n)$ se le variabili che compaiono in esso sono un sottoinsieme di $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Esempio 1.8. Tra i termini di $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ troviamo x_0, 0, ma anche $+(-(1), \cdot(x_0, x_0))$, che scriveremo più semplicemente come $-1 + x_0^2$, utilizzando la notazione infissa per le operazioni binarie ed omettendo le parentesi che non generano ambiguità..

Definizione 1.9. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$, sia $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura. Sia $S \subseteq \mathcal{M}$ un elemento qualsiasi. Si dice *sottostruttura generata* da S in $\mathcal{M}$, e si indica con $\langle S \rangle$, la più piccola sottostruttura di M contenente S e chiusa per l'interpretazione degli $\mathcal{L}$-termini. Data A sottostruttura di $\mathcal{M}$, scriveremo spesso $A\langle S \rangle$ al posto di $\langle A \cup S \rangle$.

Esempio 1.10. Sia K un campo ordinato, $k \subseteq K$ un sottocampo, $s \in k$. Vediamo K, k come strutture in un linguaggio $\mathcal{L}_{\text{or}}^D = \mathcal{L}_{\text{or}} \cup \{D\}$, dove D è un simbolo di funzione binaria interpretato come divisione:

$$D(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La sottostruttura generata $k\langle a \rangle$ è semplicemente il sottocampo $k(a)$.

Definizione 1.11. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$. Le $\mathcal{L}$-formule *atomiche* sono le espressioni del tipo

- $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$, con t_1, t_2 termini;
- $R(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_m))$, con t_i termini e R simbolo di relazione m-aria.

Le $\mathcal{L}$*-formule* sono il più piccolo insieme di espressioni che contengono le formule atomiche e sono chiuse per l'utilizzo di:

- connettivi booleani $\wedge, \vee, \neg$: cioè, date due formule φ_1, φ_2, anche $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ e $(\neg\varphi_1)$ sono formule;
- quantificatori del primo ordine $\exists x\,, \forall x\,$, con x variabile: cioè, se φ è una formula, $\exists x\, \varphi$, $\forall x\, \varphi$ sono formule.

Osservazione 1.12. Utilizzeremo anche il connettivo $\to$, dove $\varphi \to \psi$ può essere pensata come un'abbreviazione per indicare $(\neg\varphi) \vee \psi$. Inoltre, scriveremo $\varphi \leftrightarrow \psi$ per $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Definizione 1.13. Sia φ una $\mathcal{L}$-formula priva di quantificatori. Si dice che φ è in *forma normale disgiuntiva* se è nella forma

$$\bigvee_{i=1}^{I} \bigwedge_{j=1}^{J_i} \varphi_{ij}$$

dove le φ_{ij} sono formule atomiche.
Analogamente, si chiama *forma normale congiuntiva* la forma analoga in cui il quantificatore più esterno è la congiunzione, quello più interno la disgiunzione.
Si può dimostrare che ogni formula priva di quantificatori equivale ad una formula in forma normale disgiuntiva e ad una in forma normale congiuntiva.

Definizione 1.14. Una $\mathcal{L}$-formula ψ si dice in *forma normale prenessa* se presenta tutti i quantificatori all'inizio: è del tipo

$$\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \, \varphi(\bar{x})$$

dove ogni $\mathcal{Q}_i$ è un quantificatore $\exists$ o $\forall$ e φ è priva di quantificatori. Come prima, si può dimostrare che ogni formula si può trasformare in una formula equivalente posta in forma normale prenessa (dove la φ senza quantificatori si può anche supporre in forma normale disgiuntiva).

Definizione 1.15. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, φ una $\mathcal{L}$-formula. Si dicono *variabili libere* quelle a cui non è stato applicato nessun quantificatore, cioè quelle x che non appaiono in una sottoformula $\exists x \, \psi$. Si dicono *variabili legate* le altre. Se una formula ha variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$, scriveremo anche $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Per brevità, talvolta scriveremo anche $\varphi(\bar{x})$.
Si dice $\mathcal{L}$-*enunciato*, o *formula chiusa*, una $\mathcal{L}$-formula in cui tutte le variabili sono legate.

Esempio 1.16. La definizione di commutatività della somma è espressa dalla formula φ data da:

$$\forall x, y \, (x + y = y + x).$$

In essa entrambe le variabili x, y sono legate. Nella sola formula $x + y = y + x$, invece, sono libere.

Definizione 1.17. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio. Si dice $\mathcal{L}$-teoria un insieme T di $\mathcal{L}$-enunciati. Tali enunciati vengono anche detti *assiomi* di T.

Esempio 1.18. La teoria degli anelli ordinati T_{or} nel linguaggio $\mathcal{L}_{\text{or}}$ è l'insieme degli enunciati che definiscono le proprietà associativa e commutativa della somma:

$$\forall x, y \, (x + y = y + x) \tag{1.1}$$

$$\forall x, y, z \, ((x + y) + z) = x + (y + z)), \tag{1.2}$$

gli assiomi analoghi per il prodotto, gli assiomi che definiscono $0, 1$ come elementi neutri delle rispettive operazioni e infine gli enunciati che esprimono la compatibilità tra $+, \cdot, <$.
La teoria dei campi ordinati T_{of} è $T_{\text{or}} \cup \{\varphi_{\text{inv}}\}$, dove φ_{inv} è l'assioma che afferma l'esistenza dell'inverso per il prodotto, ovvero:

$$\forall x \, (x \neq 0 \implies \exists y \, x \cdot y = 1)$$

Definizione 1.19. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, T una $\mathcal{L}$-teoria. Data una $\mathcal{L}$-formula φ, diciamo che φ è conseguenza logica di T, in simboli

$$T \models \varphi,$$

se ogni per ogni modello $M \models T$ vale $M \models \varphi$.
Una teoria si dice *completa* se contiene tutte le sue conseguenze logiche. Si può mostrare che è equivalente definire che una teoria è completa se tutti i suoi modelli sono *elementarmente equivalenti*, ovvero soddisfano gli stessi enunciati del primo ordine.

Definizione 1.20. Dato $\mathcal{L}$ linguaggio, $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura, è possibile costruire una teoria associata a tale struttura:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-enunciato} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

La teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ è chiamata la *teoria completa* di $\mathcal{M}$, ed è effettivamente una teoria completa. Se T è una teoria completa e $\mathcal{M}$ è un suo modello, allora $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Definizione 1.21. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, T una $\mathcal{L}$-teoria, $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura. Diciamo che $\mathcal{M}$ è un modello di T, in simboli $\mathcal{M} \models T$, se ogni formula di T è vera in $\mathcal{M}$ (dove il valore di verità di una formula è dato dall'interpretazione naturale dei connettivi booleani; i quantificatori $\exists, \forall$ hanno come dominio M, ovvero il dominio di $\mathcal{M}$.

Esempio 1.22. Continuando l'esempio precedente, un modello di T_{of} è sicuramente $\bar{\mathbb{R}}$, essendo un campo ordinato. Essendo modello di una teoria che contiene T_{or}, è in particolare anche un modello di questa teoria. In generale, però, i modelli di T_{or} possono anche essere semplicemente anelli ordinati, ad esempio la $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-sottostruttura $\mathbb{Z} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$.

1.1 Eliminazione dei quantificatori

Definizione 1.23. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$ e una $\mathcal{L}$-teoria T. Diciamo che T *elimina i quantificatori*, o *ammette eliminazione dei quantificatori* (che abbrevieremo con EQ) se, per ogni $\mathcal{L}$-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, esiste una formula senza quantificatori $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$ per cui

$$T \models \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_0(\bar{x})).$$

Osserviamo che le formule prive di quantificatori sono ottenute a partire dalle formule atomiche applicando i connettivi booleani, e come notato nel paragrafo precedente possiamo sempre supporla in forma normale disgiuntiva.

Esempio 1.24. Dimostreremo nel prossimo capitolo che la teoria completa di $\bar{\mathbb{R}}$ ammette eliminazione dei quantificatori. Per vederne un esempio, la formula esistenziale $\varphi = \varphi(b, c)$

$$\exists x\, x^2 + bx + c = 0,$$

che esprime l'esistenza di una soluzione ad un'equazione di secondo grado, soddisfa

$$\mathrm{Th}(\bar{\mathbb{R}}) \models \varphi \leftrightarrow b^2 - 4c \geq 0,$$

dove "$x \geq y$" è naturalmente un'abbreviazione di "$x > y \vee x = y$". La formula $b^2 - 4c \geq 0$ è priva di quantificatori.

In generale, se in una teoria c'è eliminazione dei quantificatori, le proprietà del primo ordine che possiamo esprimere in quella teoria (con un numero di quantificatori arbitrario) hanno tutte una descrizione molto semplice, essendo equivalenti ad una combinazione booleana di formule atomiche. Esamineremo questo concetto più a fondo nel resto della tesi.

Per continuare, diamo una definizione di una proprietà leggermente più debole dell'eliminazione dei quantificatori, ma che ne mantiene molte delle conseguenze utili. Al posto dell'eliminazione di tutti i quantificatori, ammettiamo che restino in testa alla formula dei quantificatori esistenziali.

Definizione 1.25. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio e T una $\mathcal{L}$-teoria. Si dice che T è *model-completa* se, data una qualsiasi $\mathcal{L}$-formula $\varphi = \varphi(\bar{y})$, esiste una formula esistenziale $\varphi_1(\bar{y}) \equiv \exists \bar{x}\, \theta(x, \bar{y})$ con θ priva di quantificatori, tale che

$$T \models \varphi(\bar{y}) \leftrightarrow \varphi_1(\bar{y})$$

Definizione 1.26. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, e siano $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due $\mathcal{L}$-strutture. Una mappa $e\colon M \to N$ si dice *immersione* se soddisfa la seguente proprietà: per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$, per ogni $\mathcal{L}$-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ senza quantificatori, vale

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(e(a_1), \dots, e(a_n)).$$

Diremo che φ *preserva* le formule senza quantificatori se φ soddisfa la condizione appena enunciata.

Osservazione 1.27. Un'immersione è sempre un *morfismo* tra strutture, cioè manda le costanti c in sé, per le funzioni vale $e(f(t_1, \dots, t_n) = f(e(t_1), \dots, e(t_n))$ e per le relazioni $R(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow R(e(t_1), \dots, e(t_n))$.
Inoltre, è una mappa iniettiva, in quanto preserva la formula atomica $\varphi(a, b) \equiv a = b$. Cioè, ogni volta che vale $e(a) = e(b)$ allora vale $a = b$.

Osservazione 1.28. La richiesta che un'immersione preservi le formule senza quantificatori è equivalente a richiedere che preservi soltanto le formule atomiche.

Osservazione 1.29. Supponiamo che M e N siano due modelli di T_{or}, ovvero due anelli ordinati, e sia $e\colon M \to N$ immersione. Allora, dati $a, b \in M$, vale:

$$e(a + b) = e(a) + e(b)$$
$$e(a \cdot b) = e(a) \cdot e(b)$$
$$e(-a) = -e(a)$$
$$a > 0 \Leftrightarrow e(a) > 0.$$

Ciò significa che un'immersione tra anelli ordinati è un omomorfismo di anelli che preserva l'ordine, e si vede facilmente che vale anche il viceversa: ogni omomorfismo iniettivo di anelli ordinati è un'immersione di $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-strutture.

Definizione 1.30. Siano al solito $\mathcal{L}$ un linguaggio, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due $\mathcal{L}$-strutture. Una immersione $e\colon M \to N$ si dice *elementare* se preserva tutte le $\mathcal{L}$-formule, non soltanto quelle prive di quantificatori.

Osservazione 1.31. Se una struttura si immerge elementarmente in un'altra, le due strutture soddisfano in particolare gli stessi enunciati (senza variabili libere), e dunque hanno la stessa teoria completa.

Passiamo adesso ad esaminare alcune condizioni equivalenti per l'eliminazione dei quantificatori, da cui riusciremo a derivare una condizione sufficiente (in termini di immersioni) affinché una teoria ammetta EQ, che poi useremo nel prossimo capitolo.

Per formulare il prossimo risultato, diamo due definizioni preliminari.
Dato $\mathcal{L}$ linguaggio, M una $\mathcal{L}$-struttura e A un suo sottoinsieme, si può definire il linguaggio espanso $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$. Allora M si può *espandere* (cioè considerare come una struttura in un linguaggio più ampio) ad una $\mathcal{L}(A)$-struttura che interpreta ogni nuova costante c_a come il corrispondente elemento di A.
Definiamo poi il diagramma atomico

$$D_0(M, A) = \{\varphi\ \mathcal{L}(A)\text{-enunciato senza quantificatori} \mid M \models \varphi\}.$$

In pratica, si tratta di tutte le formule del primo ordine prive di quantificatori in cui si possono utilizzare anche tutti gli elementi di A come parametri.
Osserviamo che, in questa situazione, $M \models \varphi$ vale se e solo se $\langle A \rangle \models \varphi$. Tuttavia bisogna notare il fatto seguente: affinché $\langle A \rangle$ sia una struttura ben definita è necessario che non sia vuota. Per questo è sufficiente che il linguaggio contenga un simbolo di costante. Questo non sarà un problema, dato che i linguaggi con cui lavoreremo per il resto della tesi soddisferanno questa ipotesi.

Proposizione 1.32. *Sia T una $\mathcal{L}$-teoria. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) T elimina i quantificatori

(ii) Dato $M \models T$, A una sua sottostruttura qualsiasi, $D_0(M, A) \cup T$ è una $\mathcal{L}(A)$-teoria completa.

Prima di dimostrare la proposizione, osserviamo che la seconda condizione si può riformulare dicendo che dati $M, N \models T$, $A \subseteq M, A \subseteq N$ sottostruttura comune, $\bar{a} \in A$ si ha:

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}).$$

Di solito, per la presenza di quantificatori, la verità delle formule che esprimono delle proprietà su elementi di una sottostruttura $A \subseteq M$ potrebbe dipendere da quale sia la struttura M. Tuttavia, quando c'è EQ, la situazione si semplifica e basta studiare solo le formule prive di quantificatori, che dipendono soltanto dai parametri considerati e non dall'intera struttura.

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ *(ii).* Sia $A \subseteq M \models T$, e sia $B \models T' = D_0(M, A) \cup T$. Consideriamo $\varphi(c_{\bar{a}})$ una $\mathcal{L}(A)$-formula (dove $\varphi(\bar{x})$ è una $\mathcal{L}$-formula, $\bar{a} \in A$ elementi qualsiasi). Dato che B ha un'interpretazione per ognuna delle costanti c_a, allora esiste un'immersione naturale $e\colon A \to B|_{\mathcal{L}}$, con $a \mapsto (c_a)^B$. (Nota: qui $B|_{\mathcal{L}}$ rappresenta la restrizione di B al linguaggio più piccolo $\mathcal{L}$, dato che formalmente B sarebbe una $\mathcal{L}(A)$-struttura. Allo stesso modo, chiamiamo $M_{\mathcal{L}(A)}$ la struttura M espansa.)
Supponiamo allora $M_{\mathcal{L}(A)} \models \varphi(c_{\bar{a}})$. Dal momento che $\varphi(c_{\bar{a}})$ è equivalente ad una formula senza quantificatori ed ha parametri soltanto in A, viene preservata dall'immersione e, cioè vale $B \models \varphi(c_{\bar{a}})$.
Quanto detto si riscrive come $\mathrm{Th}(M_{\mathcal{L}(A)}) \subseteq \mathrm{Th}(B)$. Vale anche l'inclusione opposta: se $M_{\mathcal{L}(A)}$ non verifica una certa formula, allora verifica la sua negazione, e si può riapplicare quanto detto per vedere che anche B verifica la negazione. Ciò mostra che tutti i modelli di T' soddisfano le stesse formule del primo ordine, dato che

$$B \models T' \implies \mathrm{Th}(B) = \mathrm{Th}(M_{\mathcal{L}(A)}),$$

e cioè infine che T' è una teoria completa.
(ii) $\Longrightarrow$ *(i).* Sia $\varphi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-formula qualsiasi. Definiamo l'insieme di formule

$$S_0 = \{\psi(\bar{x}) \text{ senza quantificatori} \mid T \models \forall \bar{x}\, (\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))\}.$$

Introduciamo nuovi simboli di costante $\bar{c}$ e una nuova teoria

$$T_0 = T \cup \{\varphi(\bar{c})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c}) \mid \psi \in S_0\}.$$

Basta mostrare che la teoria T_0 non è coerente (cioè non ha nessun modello). In tal caso, è possibile mostrare[1] che seguirebbe

$$T \models \forall \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\bar{x}) \to \neg\varphi(\bar{x}) \right)$$

per certe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in S_0$, per cui (per costruzione di S_0) avremmo

$$T \models \forall \bar{x} \left(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{x}) \right)$$

[1] Si utilizza il *Teorema di compattezza*, che afferma in generale che se una teoria ha come conseguenza logica un'affermazione θ, allora in realtà θ è già conseguenza logica di un numero finito degli assiomi della teoria. In questo caso, non avere un modello è equivalente a dimostrare affermazioni contraddittorie, per cui dalle affermazioni di T_0, ovvero la teoria T con le ulteriori ipotesi $\neg\psi_i$ poste come antecedente dell'implicazione, si dimostrerebbe $\neg\varphi$ nonostante ci sia già φ in T_0.

e questo dà la tesi.
Supponiamo per assurdo che esista un modello $A \models T_0$. Siano poi

$$S_1 = \{\psi(\bar{x}) \text{ senza quantificatori} \mid A \models \psi(\bar{c})\},$$
$$T_1 = T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\} \cup \{\psi(\bar{c}) \mid \psi(\bar{x}) \in S_1\}.$$

Sicuramente, per costruzione di S_0, per ogni $\psi(\bar{x}) \in S_0$ vale $\neg\psi(\bar{x}) \in S_1$.
Affermiamo che T_1 ha un modello. Infatti, se non ne avesse, si può mostrare che varrebbe, similmente a prima, $T \models \forall x \left(\bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})\right)$, da cui $\bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}) \in S_0$, per certe $\psi_i \in S_1$, e questo è assurdo: S_1 dovrebbe contenere sia quest'ultima congiunzione (in quanto le singole ψ_i vi appartengono) ma anche la negazione di questa congiunzione (in quanto questa congiunzione è in S_1), quindi $\bar{c} \in A$ dovrebbe soddisfare due formule contraddittorie.
Allora sia $B \models T_1$. Le interpretazioni delle costanti $\bar{c}$ soddisfano le stesse $\mathcal{L}$-formule senza quantificatori in A e in B. Per (i), $D_0(A, \{c_1, \dots, c_m\}) \cup T$ è una teoria completa, dunque A e B soddisfano gli stessi $\mathcal{L}(\bar{c})$-enunciati del primo ordine. Tuttavia, per costruzione, A soddisfa $\varphi(\bar{c})$ (essendo modello di T_0) mentre B soddisfa $\neg\varphi(\bar{c})$ (essendo modello di T_1), e questo è assurdo, come volevamo dimostrare. □

Senza dimostrarla, menzioniamo una caratterizzazione analoga per la model-completezza, che giustifica anche il nome di questa proprietà.

Proposizione 1.33. *Sia T una $\mathcal{L}$-teoria. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *T è model-completa*
- *Dato $M \models T$, $D_0(M) \cup T$ è una $\mathcal{L}(M)$-teoria completa*
- *Dati $M, N \models T$ ogni immersione $e : M \to N$ è elementare.*

Tale caratterizzazione è utile perché permette di mettere in relazione le formule soddisfatte da modelli della stessa teoria semplicemente tramite un'immersione. Spesso, se si vogliono studiare le proprietà del modello standard di una teoria (sarà $\mathbb{R}$ nelle teorie che ci interessano), è possibile ottenere informazioni comprendendo come sono fatti anche i modelli non standard in cui immergiamo quello standard.

Siamo pronti per enunciare un criterio che ci aiuterà a mostrare EQ per certe teorie. Nell'enunciato compare un'ipotesi di strutture *sufficientemente sature*, che esamineremo dopo la dimostrazione del teorema.

Teorema 1.34 (Test per EQ). *Sia T una $\mathcal{L}$-teoria, $M, N \models T$ suoi modelli sufficientemente saturi. Supponiamo che, data una sottostruttura $A \subseteq M$ e un qualunque $a \in A$, ogni immersione di A in N si estenda ad un'immersione di $A' \supseteq A \cup \{a\}$ in N. Allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "e"] \arrow[d, hook] & N \\
A\langle a\rangle \arrow[ur, hook, dotted, "e'"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione del Teorema. Per la Proposizione 1.32, basta dimostrare che dati $A \subseteq M \models T$, la teoria $D_0(A) \cup T$ è completa, cioè due suoi modelli soddisfano gli stessi enunciati del primo ordine. Sicuramente $M_{\mathcal{L}(A)} \models D_0(A) \cup T$, prendiamo un altro $N \models D_0(A) \cup T$. Dal fatto che $N \models D_0(A)$ segue che esiste un'immersione naturale $e\colon A \to N$.[2] Questa immersione (per definizione) preserva le formule senza quantificatori.
Vogliamo mostrare che, data una $\mathcal{L}(A)$-formula $\varphi(c_{\bar{a}})$ (con $\varphi(\bar{x})$ formula in $\mathcal{L}$ e $\bar{a} \in A$), vale

$$M_{\mathcal{L}(A)} \models \varphi(c_{\bar{a}}) \Leftrightarrow N \models \varphi(c_{\bar{a}}), \tag{1.3}$$

cioè che $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N' = N|_{\mathcal{L}} \models \varphi(e(\bar{a}))$.
Dimostriamo una cosa più forte: data una $e'\colon A' \to N$ che estende e, con N, M, A, A' strutture come nell'enunciato del teorema, per ogni $\bar{a} \in A'$, vale

$$M \models \varphi(\bar{a}) \leftrightarrow N|_{\mathcal{L}} \models \varphi(e'(\bar{a})).$$

per ogni $\mathcal{L}$-formula φ. Mostriamo questa condizione per induzione sul numero n di quantificatori che appaiono in φ.
Se $n = 0$, vale per ipotesi in quanto e' è sempre un'immersione.
Supponiamo la tesi vera fino a $n-1$. Sia e' un'estensione definita su A, e $\varphi(\bar{x}) \equiv \exists y\, \psi(y, \bar{x})$ una formula in cui $\psi(y, \bar{x})$ ha al più $n-1$ quantificatori. Supponiamo che M verifichi φ, cioè che esista un elemento $b \in M$ tale che $M \models \psi(b, \bar{a})$. Per ipotesi e' si estende ulteriormente ad $e''\colon A'\langle b\rangle \to N$, per cui vale $N \models \psi(e''(b), e(\bar{a}))$ e dunque $N \models \varphi(e(\bar{a}))$.
Viceversa, supponiamo $N \models \psi(b', e(\bar{a}))$ per un certo b'. Si applica lo stesso ragionamento alla sottostruttura $B = e(A)$ e all'immersione $e^{-1}\colon B \to M$ per ottenere la tesi.
Se φ è della forma $\forall y\, \psi(y, \bar{x})$ basta passare alla negazione ed utilizzare quanto già dimostrato. Ciò conclude la dimostrazione. □

La definizione di *sufficientemente saturi* che compare nell'enunciato del teorema precedente è la seguente:

Definizione 1.35. Fissato un linguaggio $\mathcal{L}$, consideriamo un insieme di formule $\Sigma(\bar{x}) = \{\varphi_i(\bar{x})\}_{i\in I}$.
Data M una $\mathcal{L}$-struttura, diciamo che $\Sigma(\bar{x})$ è *finitamente soddisfacibile in M* se, date

[2] Dato che N è una $\mathcal{L}(A)$-struttura, per ogni $a \in A$ esiste un elemento $n_a \in N$ che interpreta la costante c_a del linguaggio. Essendo N un modello del diagramma atomico con parametri da A, gli n_a soddisfano le stesse formule atomiche degli $a \in A$. Ciò significa proprio che la mappa $a \mapsto n_a$ è un'immersione.

$\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Sigma$, esistono elementi $\bar{a} \in M$ tali che $M \models \varphi_1(\bar{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\bar{a})$. Si dice *soddisfacibile*, o *realizzabile* in M, se invece esistono $\bar{a}$ che soddisfano *tutte* le formule di Σ, cioè per ogni $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ vale $M \models \varphi(\bar{a})$.
Diciamo che Σ è un *tipo di M* se è finitamente soddisfacibile. Un tipo con parametri da A sottoinsieme di M è semplicemente un tipo di $M_{\mathcal{L}(A)}$ nel linguaggio $\mathcal{L}(A)$.
Diciamo, infine, che una $\mathcal{L}$-struttura M è κ-satura, con κ una certa cardinalità, se ogni tipo con parametri da A è soddisfacibile in M, dove $A \subseteq M, |A| < \kappa$. L'espressione *sufficientemente saturo* nell'enunciato indica κ-saturo con $\kappa = |A'|^+$, dove $A \leq |A| + |\mathcal{L}| + |\aleph_0|$.

La richiesta che i modelli siano sufficientemente saturi nell'enunciato del test per EQ è un'aggiunta tecnica che "rilassa" le ipotesi. Per riuscire ad estendere sempre le immersioni a un nuovo elemento $a \in M_1$, abbiamo bisogno di elementi che realizzano il tipo di a (cioè le formule realizzate da a), e questi elementi si trovano nelle strutture sature. In una struttura insatura "mancano elementi", ma si può dimostrare che ogni struttura si immerge elementarmente in una struttura satura che realizza tutti i suoi tipi.

Va menzionato un dettaglio tecnico: solitamente, la definizione di saturazione richiede solo che M realizzi tutti gli 1-tipi, ovvero i tipi in una sola variabile. Tuttavia da questo si mostra per induzione transfinita che una struttura κ-satura M realizza i tipi in un numero qualsiasi di variabili, anche infinito, purché sia l'insieme dei parametri che l'insieme delle variabili abbiano cardinalità minore di κ.

La dimostrazione che segue serve a risolvere questo dettaglio tecnico, e non è centrale per lo sviluppo del resto della tesi.

Proposizione 1.36. *Sia M una $\mathcal{L}$-struttura, $A \subseteq M$ un sottoinsieme di cardinalità minore di κ. Supponiamo che M realizzi tutti gli* 1*-tipi con parametri da A. Sia $\Sigma(\{x_i\}_{i\in I})$ un tipo in un insieme infinito di variabili, $|I| < \kappa$. Allora M realizza $\Sigma(\{x_i\}_{i\in I})$.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che l'insieme di variabili sia numerabile. Il caso con cardinalità maggiori è analogo e procede per induzione transfinita utilizzando le stesse idee che useremo adesso.
Supponiamo allora che le variabili siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e $\Sigma(\bar{x}) = \Sigma(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ un tipo di M con parametri da A.
Dato che $\Sigma(\bar{x})$ è un tipo, ovvvero finitamente soddisfacibile in M, allora la teoria $T = D_e(M) \cup \Sigma(\bar{c})$ ammette un modello N. Qui abbiamo posto $\bar{c} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nuove costanti, mentre $D_e(M)$, detto *diagramma elementare di M*, è l'insieme delle formule di $\mathcal{L}(M)$ verificate da M.
Consideriamo allora $N \models T$ e diamo per noto il seguente fatto: Se N è un modello di $D_e(M)$, allora esiste un'immersione elementare $M \to N$, e a meno di sostituire con M la

sua copia all'interno di M, possiamo immaginare che M sia una sottostruttura (elementare) di N.
Per costruzione, esistono $\bar{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elementi di N che realizzano $\Sigma(\bar{x})$. Consideriamo $p(\bar{x})$ il tipo completo di $\bar{\alpha}$, cioè l'insieme delle formule con parametri da A verificate da $\bar{\alpha}$, che indichiamo con $\mathrm{tp}(\bar{\alpha})_A$. Vogliamo trovare $\bar{\beta} = \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che realizzi il tipo di $\bar{\alpha}$ ma dentro la struttura piccola M.
Per induzione su n, si costruiscono $\beta_0, \dots, \beta_n \in M$ che realizzano in M il tipo di $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Ciò significa che al passo $n+1$ i primi β_i, $i = 1, \dots, n$, restano invariati. In questo modo, la successione che cerchiamo $\{\beta_n\}_n$ è costituita dagli elementi trovati uno alla volta nei passi dell'induzione.
Caso $n = 0$. Vogliamo realizzare il tipo $\mathrm{tp}(\alpha_0)_A$ in M con un certo elemento β_0. Questo è un 1-tipo, quindi è realizzato da M per ipotesi.
Caso $n = 1$. Sia

$$p(\beta_0, x) = \{\varphi(\beta_0, x) \mid N \models \varphi(\alpha_0, \alpha_1), \varphi \text{ un } \mathcal{L}(A)\text{-enunciato}\}.$$

Vogliamo verificare che $p(\beta_0, x)$ sia un tipo, cioè sia finitamente soddisfacibile. Mostriamo che una congiunzione di formule in $p(\beta_0, x)$ è soddisfacibile in M, e cioè che data una $\varphi(y, x)$ tale che $M \models \varphi(\alpha_0, \alpha_1)$ valga

$$M \models \exists x\, \varphi(\beta_0, x).$$

Considerando la formula $\psi(y) \equiv \exists x\, \varphi(y, x)$, vogliamo che valga $M \models \psi(\beta_0)$, e per costruzione (per ipotesi induttiva) questo vale se e solo se $N \models \psi(\alpha_0)$, cioè $N \models \exists x\, \varphi(\alpha_0, x)$. Quest'ultima formula è vera, in quanto $N \models \varphi(\alpha_0, \alpha_1)$ proprio per come abbiamo scelto φ. Infine, il passo induttivo da n a $n + 1$ si realizza in maniera identica al caso $n = 1$. □

1.2 O-minimalità

Nella presente sezione diamo la definizione di o-minimalità e ne esploriamo alcune conseguenze geometriche interessanti, su cui torneremo nel terzo capitolo.

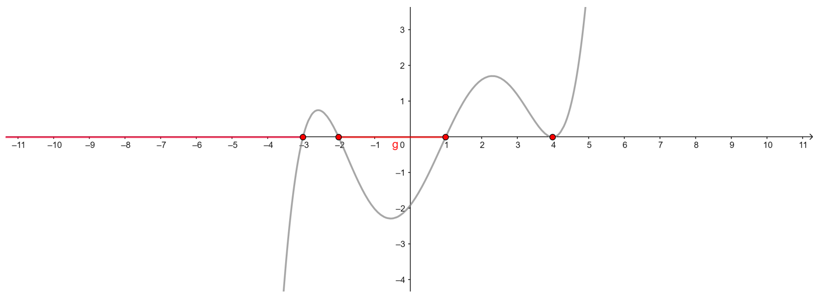
Definizione 1.37. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-formula. L'insieme *definito da* φ è

$$\varphi(\mathcal{M}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}.$$

Un sottoinsieme $A \subseteq M^n$ si dice *definibile* (con parametri da un sottoinsieme $B \subseteq M$) se esiste una $\mathcal{L}(B)$-formula φ per cui $A = \varphi(M_{\mathcal{L}(B)})$.

Definizione 1.38. Sia $\mathcal{L} = (<, \dots)$, un linguaggio contenente un simbolo di relazione binaria, $\mathcal{M}$ una struttura che interpreta $<$ come un simbolo di relazione d'ordine totale. Diciamo che $\mathcal{M}$ è *o-minimale* se ogni sottoinsieme definibile di M (in una dimensione) è un'unione finita di intervalli e punti.

Esempio 1.39. Dimostreremo nel terzo capitolo che $\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$ è o-minimale. La seguente figura mostra un esempio di insieme definibile in $\mathbb{R}$, mostrando che effettivamente è un'unione finita di intervalli (non necessariamente limitati) e punti. Consideriamo l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) \geq 0$, dove f è un polinomio di quinto grado (definibile dalla formula corrispondente in $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$).



La proprietà di o-minimalità riguarda sottoinsiemi di strutture lineari (con una relazione d'ordine totale, in dimensione 1), ma ha dei risvolti anche in dimensione superiore. Vediamoli nel caso in cui la struttura di partenza abbia come dominio $\mathbb{R}$ (sarà soprattutto questo a interessarci nell'ultimo capitolo); ciò che diremo si può generalizzare agevolmente a strutture totalmente ordinate più generali.

Gli insiemi definibili di una struttura formano una famiglia di insiemi che si possono presentare con la seguente caratterizzazione induttiva.

Definizione 1.40. Un sistema di Tarski su $\mathbb{R}$ è una successione di famiglie di insiemi $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che:

- Per ogni n, la famiglia $\mathcal{S}_n$ è un'algebra di Boole di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$
- $X \in \mathcal{S}_n \implies \mathbb{R} \times X, X \times \mathbb{R} \in \mathcal{S}_{n+1}$
- $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i = x_j\} \in \mathcal{S}_n$
- $X \in \mathcal{S}_{n+1} \implies \pi(X) \in \mathcal{S}_n$, con $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ proiezione canonica.

Un sistema di Tarski si dice *o-minimale* se ogni singoletto $\{r\}$ con $r \in \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{S}_1$, l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ sta in $\mathcal{S}_2$, e gli unici insiemi di $\mathcal{S}_1$ sono quelli con un numero finito di componenti connesse, cioè sono unione finita di intervalli e punti.

Osserviamo che gli insiemi definibili di una struttura sono un sistema di Tarski; se la struttura è o-minimale, il sistema lo è. Viceversa, i sistemi di Tarski sono chiusi per definibilità.

L'o-minimalità ha svariate conseguenze geometriche di finitezza molto interessanti. Nel seguito ne diamo alcuni enunciati, in cui consideriamo $\mathcal{S}$ un sistema di Tarski o-minimale fissato.

Notazione 1.41. Una funzione $f\colon X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ appartiene a $\mathcal{S}$ se il suo grafico appartiene a $\mathcal{S}_{n+m}$.

Proprietà dei sistemi o-minimali.

- *Monotonia a tratti.* Se (a, b) è un intervallo, a o b eventualmente infiniti, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{S}$, allora esistono $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ tali che su ogni sottointervallo (a_i, a_{i+1}) la funzione è continua e strettamente monotona, oppure costante.

- *Regolarità C^k a tratti.* L'enunciato sulla monotonia a tratti si può raffinare: per ogni k fissato, si può trovare una partizione di (a, b) in sottointervalli su ciascuno dei quali la funzione f è di classe C^k.

- *Limitazioni uniformi.* Ogni insieme $X \in \mathcal{S}_n$ ha un numero finito di componenti connesse, ed ogni componente appartiene ancora a $\mathcal{S}_n$. Inoltre, se $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ ha grafico in $\mathcal{S}_{n+m}$ allora esiste un $N = N(f) \in \mathbb{N}$ per cui, qualunque sia $x \in \mathbb{R}^m$, la fibra $f^{-1}(x)$ ha al più N componenti connesse.

- *Decomposizione in celle.* Ogni insieme $X \in \mathcal{S}_n$ si può partizionare in un numero finito di *celle* $C_1, \ldots, C_m$, dove le celle sono una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ definiti nel seguente modo.
  - Le 0-celle sono i singoletti.
  - Le 1-celle in $\mathbb{R}$ sono gli intervalli $a < b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
  - Sia X una n-cella, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{S}$. Allora il grafico di f è una n-cella, mentre sono $(n+1)$-celle l'area al di sopra del grafico, l'area al di sotto, o l'area compresa tra il grafico di f e quello di un'altra funzione $g \in \mathcal{S}$ che soddisfa $g(x) > f(x)$ per ogni x.

Capitolo 2

Campi reali chiusi

Il presente capitolo intende studiare la teoria completa $T_{\mathrm{RCF}} = \mathrm{Th}(\bar{\mathbb{R}})$, dove la struttura $\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$ è stata definita nel capitolo precedente. Tramite questa, è possibile studiare le proprietà dei numeri reali e di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ esprimibili tramite le operazioni algebriche.
Lo studio di queste teorie è rilevante in quanto permette di studiare, da un punto di vista apparentemente lontano dalla geometria, certi problemi geometrico-algebrici, con i quali il collegamento sarà reso esplicito e approfondito nell'ultimo capitolo. In questo capitolo, invece, studieremo la teoria T_{RCF} con un approccio puramente model-teoretico.

L'obiettivo principale di questo capitolo e del seguente, in cui utilizzeremo le stesse tecniche ma su una teoria che riguarda funzioni analitiche, è mostrare che le proprietà di queste teorie sono *facili da descrivere*: vedremo che l'una ammette eliminazione dei quantificatori, l'altra è model-completa. Lo strumento principale per mostrare questi risultati, in entrambi i casi, sarà il Teorema 1.34, che permette di riformulare in termini di immersioni un problema di semplificazione di formule, quindi permette di studiare le strutture considerate tramite strumenti algebrici.

2.1 La teoria RCF

Studiamo il campo reale dotato delle operazioni algebriche, ovvero la struttura $\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$ nel linguaggio $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$. La studieremo come modello della teoria T_{RCF}, che definisce i campi reali chiusi (*Real Closed Fields, RCF*). Diciamo che un campo F è reale chiuso se è un campo ordinato e soddisfa la proprietà dei valori intermedi, ovvero, fissato un polinomio $p(x) \in F[x]$:

$$\forall a, b \left(a < b \wedge p(a) < 0 \wedge p(b) > 0 \to \exists x \,(a < x < b \wedge p(x) = 0)\right).$$

Tarski per primo ha dimostrato che questa teoria ammette eliminazione dei quantificatori, e che addirittura esiste un algoritmo per trasformare ogni formula in una equivalente senza quantificatori. Noi dimostreremo semplicemente l'eliminazione dei quantificatori, non questa versione più forte. Tramite i risultati ottenuti, vedremo inoltre che la teoria dei campi reali chiusi è completa. Ciò significa che, poiché $\mathbb{R} \models T_{\mathrm{RCF}}$, i campi reali chiusi sono tutti e soli quelli elementarmente equivalenti a $\mathbb{R}$.

2.2 Il teorema di Tarski: idee di dimostrazione

Come già accennato sopra, vogliamo dimostrare il seguente risultato fondamentale in teoria dei modelli:

Teorema 2.1 (Tarski)**.** *La teoria T_{RCF} ammette eliminazione dei quantificatori.*

Per dimostrarlo, vogliamo far uso del criterio 1.34 introdotto nel capitolo precedente. Il setting per lavorare con questo criterio comprende due campi $K_1, K_2 \models T_{\mathrm{RCF}}$ che supporremo sufficientemente saturi, una sottostruttura $k \subseteq K_1$ (a priori k è semplicemente un sottoanello, ma potremo supporre sia anch'esso un campo) e un'immersione di $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-strutture $e \colon k \to K_2$. Come abbiamo già visto, possiamo pensare a e semplicemente come un'immersione tra campi ordinati, ovvero un omomorfismo (iniettivo) che preserva l'ordine.

Il ragionamento di fondo nella dimostrazione è il seguente: supponiamo di avere e come sopra, e di voler estendere e ad e' definito su $k' = k\langle\alpha\rangle$, con $\alpha \in K_1$ (osserviamo intanto che $k\langle\alpha\rangle$ è semplicemente l'anello dei polinomi $k[\alpha]$). Per estendere quest'immersione ci basta in realtà decidere quale debba essere l'immagine $\beta = e'(\alpha)$, in quanto e' è univocamente determinato una volta deciso questo. Per quale sia il giusto β, osserviamo come si comporta α nelle $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-formule atomiche (eventualmente con parametri in k): infatti, β dovrà soddisfare le stesse formule che soddisfa α (con gli eventuali parametri trasportati tramite e).

Le formule atomiche di $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ possono essere tutte messe in una delle due forme seguenti:

$$p(x) = 0, \qquad q(x) > 0$$

con $p, q \in k(x)$. Quindi un $\alpha \in K_1$ è praticamente descritto dal segno che assumono i polinomi valutati in questo punto, e in particolare dall'annullarsi o meno dei polinomi.

Il primo dei lemmi di cui si compone la dimostrazione studia il caso in cui vale una formula del tipo $p(\alpha) = 0$, cioè α è algebrico su k. In questo caso, dato che le radici del polinomio p sono in numero finito, si trova un intervallo ad estremi in k che isola quella radice, ovvero una caratterizzazione di α del tipo $p(\alpha) = 0 \wedge a < \alpha < b$ per certi $a, b \in k$, e tramite questa caratterizzazione (trasportata in K_2 tramite e) si trova un elemento β adatto. L'ultimo dei lemmi studia invece il caso in cui α sia trascendente su k.

2.3 Il teeorema di Tarski: dimostrazione

Definizione 2.2. Siano $k \subseteq K$ campi. Diciamo che k è n-chiuso in K se, per ogni polinomio $p(x) \in k[x]$ di grado al più n, ogni radice di p in K appartiene già a k. Diciamo che k è *algebricamente* chiuso in K se è n-chiuso per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 2.3. Nella dimostrazione seguente, utilizzeremo in K_1, K_2 alcune proprietà dei campi reali chiusi:

- in ogni campo $K \models T_{\mathrm{RCF}}$ ogni polinomio che cambia segno ha una radice;
- se la derivata formale di un polinomio ha segno costante in un certo intervallo allora il polinomio è monotono su quell'intervallo.

Osserviamo anche che, lavorando con campi ordinati, ha senso considerare il valore assoluto $|x|$ di un elemento $x \in k$ (bastano infatti $<$ e $-$ per descriverlo).

Lemma 2.4. *Siano $K_1, K_2 \models T_{\mathrm{RCF}}$, $k \subseteq K_1$ un sottocampo n-chiuso. Sia poi $e\colon k \to K_2$ una immersione, e supponiamo che anche $e(k)$ sia n-chiuso in K_2. Allora, data una radice $\alpha \in K_1 \setminus k$ che annulla un polinomio di grado al più $n+1$ su k, esiste un'immersione $e_1\colon k(\alpha) \to K_2$ che estende e.*

Dimostrazione. Sia $q(x) \in k[x]$ il polinomio minimo di α su k. Per ipotesi ha grado $\deg q \leq n+1$, e vale l'uguaglianza, altrimenti α sarebbe radice di un polinomio di grado al più n, dunque per la n-chiusura di k avremmo $\alpha \in k$.
Se $q(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$, definiamo il polinomio $q^e(x) = \sum_{i=0}^{n+1} e(a_i) x^i$. In quanto immagine di un polinomio irriducibile, q^e è irriducibile.
Scegliamo l'immagine $\beta = e(\alpha)$ nel seguente modo: innanzitutto troviamo $a, b \in k$ tali che $a < \alpha < b$ (ad esempio, $|\alpha|$ è limitato da $\sum_{i=0}^{n+1} |a_i|$) e l'intervallo (a, b) non contenga radici di $q'(x)$. Possiamo riuscirci perché q' ha grado n, per cui le sue radici sono in k, quindi diverse da α, e si trovano elementi di k tra α e la radice più vicina. Il polinomio q ha una radice in (a, b), e dall'osservazione 2.3 è monotono, dunque assume segni opposti agli estremi dell'intervallo. Segue che anche q^e cambia segno in $(e(a), e(b))$, perciò ha una radice β al suo interno.
Per l'irriducibilità dei polinomi q e q^e, la mappa $\alpha \mapsto \beta$ dà un isomorfismo *di campi* $k(\alpha) \cong e(k)(\beta)$.
Bisogna verificare che tale isomorfismo preservi l'ordinamento, e per questo basta che dato $p \in k[x]$ si abbia $p(\alpha) > 0 \implies p^e(\beta) > 0$. Possiamo supporre $\deg p \leq n$: basta effettuare la divisione euclidea $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ e osservare che $p(\alpha) = r(\alpha)$, $p^e(\beta) = r^e(\beta)$.
Sia dunque $p(\alpha) > 0$, $\deg p \leq n$. Tutte le radici di p sono in k, dunque come prima troviamo $(a', b') \subseteq (a, b)$, che contiene α e su cui p non ha radici (ha segno costante). Allora nemmeno

p^e può avere radici in $(e(a'), e(b'))$ (per la n-chiusura, la radice apparterrebbe a $e(k)$, cioè si avrebbe $p^e(e(\gamma)) = e(p(\gamma)) = 0$, ma e è iniettivo).
Il polinomio p ha segno costante nell'intervallo. Utilizzando il fatto che $a', b' \in k$ su cui e è definita, si ha $p((a' + b')/2) > 0$, dunque $p^e((e(a') + e(b'))/2) > 0$, cioè p^e è positivo su $(e(a'), e(b'))$. Mostriamo che β giace in questo intervallo.
Come sopra, q è monotono in (a', b') e si annulla in un punto dell'intervallo, quindi assume segno opposto agli estremi. Tramite e, si ottiene lo stesso per q^e, per cui esiste una radice di q^e in $(e(a'), e(b'))$. Questa deve essere necessariamente β: se in $(e(a), e(b))$ ci fosse una radice distinta da β, $(q^e)'$ si annullerebbe in un punto intermedio $c \in e(k)$ (visto che $\deg(q^e)' = n$) ma allora anche q' avrebbe una radice in (a, b), contro le ipotesi. □

Lemma 2.5. *Siano $K_1, K_2 \models T_{\mathrm{RCF}}$, k_1, k_2 sottocampi risp. di K_1, K_2, $e\colon k_1 \to k_2$ isomorfismo. Allora esistono $k_i^* \supseteq k_i$ di K_i algebricamente chiusi in K_i, isomorfi tramite una mappa $e^*\colon k_1^* \to k_2^*$ che estende e.*

Dimostrazione. Segue dal lemma precedente applicando il Lemma di Zorn: sia

$$X = \{(h_1, h_2, e) \mid h_i \text{ sottocampi } k_i \subseteq h_i \subseteq K_i,\ e'\colon h_1 \to h_2 \text{ isomorfismo che estende } e\}$$

con l'ordinamento dato da: $(h_1, h_2, e) \leq (h_1', h_2', e')$ se $h_i \subseteq h_i'$ e se e' estende e. L'insieme X è facilmente induttivo, dunque ha un elemento massimale (k_1^*, k_2^*, e^*). Banalmente k_i è 1-chiuso in K_i, e se è n-chiuso è anche $(n+1)$-chiuso. Infatti, se non fosse così, troveremmo α di grado $n+1$ su k_1^* e dal lemma 2.4 potremmo estendere l'isomorfismo, contraddicendo la massimalità. □

Lemma 2.6. *Se $K_1, K_2 \models T_{\mathrm{RCF}}$, k sottoanello di K_1, $e\colon k \to K_2$ omomorfismo di anelli. Supponendo K_2 sufficientemente satura, fissato $a \in K_1$, possiamo estendere e ad $e'\colon k[a] \to K_2$.*

Dimostrazione. Dato che un omomorfismo da un anello A a un campo K si estende in maniera univoca al campo delle frazioni di A, possiamo supporre che k sia proprio un campo.
Dal lemma 2.5, troviamo $e^*\colon k_1^* \to k_2^*$ estensione di e, con k_i^* algebricamente chiuso in K_i. Se $a \in k_1^*$ basta considerare la restrizione $e^*|_{k(a)}$ per concludere, altrimenti a è trascendente su k_1^*. In questo caso, per trovare un possibile elemento $b = e'(a) \in K_2$, consideriamo l'insieme di formule

$$\{p^e(x) > 0 \wedge q^e(x) < 0 \mid p, q \in k[x], K_1 \models p(a) > 0 \wedge q(a) < 0\}.$$

Poiché K_2 è $|k|$-saturo, basta mostrare che il tipo sopra enunciato è finitamente soddisfacibile per ottenere che è soddisfacibile, ovvero esiste $c \in K_2$ che soddisfa tutte e sole le formule del primo ordine verificate da a. Per un tale c, estendere e con $a \mapsto c$ dà una ben definita

immersione di campi ordinati.
Fissiamo allora $p_1, \dots, p_n \in k[x]$, e sia S l'insieme delle radici di questi polinomi. Definiamo

$$m_1 = \max(\{0\} \cup \{\beta \in S \mid \beta < a\}), \quad m_2 = \min(1 \cup \{\beta \in S \mid \beta > a\})$$

Allora, se $c' = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, vale che $\operatorname{sign} p_i(c') = \operatorname{sign} p_i(a)$ per $i = 1, \dots, n$. Segue che $c = e(c')$ soddisfa tutte le formule del tipo sopra, come voluto. $\square$

Dai lemmi precedenti, tramite una diretta applicazione del criterio 1.34, concludiamo subito che T_{RCF} elimina i quantificatori.

Dall'eliminazione dei quantificatori in T_{RCF} si dimostra subito la completezza:

Proposizione 2.7. *La teoria T_{RCF} è completa.*

Dimostrazione. Siano $K, F \models T_{\mathrm{RCF}}$ campi reali chiusi. Vogliamo mostrare che sono elementarmente equivalenti. Osserviamo intanto che, poiché sia K che F sono campi a caratteristica 0, contengono ciascuno una copia di $\mathbb{Q}$, che possiamo considerare come una sottostruttura comune a K e F. Sia allora φ un $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-enunciato. Per il teorema di Tarski,

$$\mathbb{R} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbb{R} \models \varphi_0$$

con φ_0 senza quantificatori.
Come osservato nel commento alla Proposizione 1.32, non avendo variabili libere, vale

$$K \models \varphi \Leftrightarrow \mathbb{Q} \models \varphi \Leftrightarrow F \models \varphi$$

come voluto. $\square$

La teoria T_{RCF} è completa, ma $\mathbb{R}$ è un suo modello. Ciò significa che $T_{\mathrm{RCF}} = \mathrm{Th}(\mathbb{R})$, quindi un campo è reale chiuso se e solo se è elementarmente equivalente a $\mathbb{R}$.

Capitolo 3

Le funzioni analitiche ristrette

In questa sezione, esaminiamo la teoria T_{an} (che definiremo tra poco), che estende T_{RCF} con funzioni analitiche. Ne vogliamo mostrare la model-completezza. Per mostrarla utilizziamo una tecnica spesso utile in teoria dei modelli: introduciamo un simbolo nuovo, già definibile in T_{an}, e utilizzando un linguaggio espanso con questo simbolo e una teoria più grande (sarà T_{an}^D) dimostriamo l'eliminazione dei quantificatori. Da qui poi deduciamo alcune conseguenze per la teoria nel linguaggio di partenza. Nello stesso spirito del capitolo precedente, per ottenere EQ usiamo il criterio 1.34 e trasformiamo la questione in un problema algebrico.

3.1 La teoria T_{an}

Definiamo intanto gli oggetti con cui lavoreremo per il resto del capitolo.

Definizione 3.1. Denotiamo con $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'anello dei germi di funzioni analitiche in n variabili convergenti su un intorno di 0.

Nel seguito, per brevità utilizzeremo una notazione compatta indicando $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $|\bar{x}| = \max |x_j|$.

Definizione 3.2. Definiamo il linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$ che espande $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{an}} = \mathcal{L}_{\mathrm{or}} \cup \{f_r \mid r \in \mathbb{R}, f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}\{\bar{x}\} \text{ convergente su un intorno aperto di } [-r, r]^n\},$$

dove i nuovi simboli f_r sono simboli di funzione, che chiameremo funzioni *analitiche ristrette.*

Una volta introdotti questi simboli, fissiamone un'interpretazione all'interno del modello standard dei reali.

Definizione 3.3. Sia $\mathbb{R}_{\text{an}}$ una $\mathcal{L}_{\text{an}}$-struttura che espande $\bar{\mathbb{R}}$ e interpreta i nuovi simboli di funzione f_r come le corrispondenti funzioni analitiche reali, ma troncate al di fuori del cubo compatto $[-r, r]^n$:

$$f_r(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{se } \bar{x} \in [-r, r]^n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nominiamo la sua teoria completa $T_{\text{an}} = \text{Th}(\mathbb{R}_{\text{an}})$.

Quella appena introdotta è la struttura su ci interessa ottenere dei risultati di eliminazione. Tuttavia, per ottenerli, avremo bisogno dell'introduzione di un altro simbolo, senza il quale non c'è l'eliminazione dei quantificatori.

Definizione 3.4. Sia D un simbolo di funzione binaria, che chiameremo *simbolo di divisione*.
Espandiamo ancora il linguaggio a $\mathcal{L}_{\text{an}}^D = \mathcal{L}_{\text{an}} \cup \{D\}$. Sia quindi $\mathbb{R}_{\text{an}}^D$ la $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$-struttura che espande $\mathbb{R}_{\text{an}}$ (quindi interpreta tutti i simboli di funzione analitica ristretta come sopra) ed interpreta il simbolo di divisione nel seguente modo:

$$D(x, y) = \begin{cases} x/y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia infine T_{an}^D la teoria completa di $\mathbb{R}_{\text{an}}^D$.

Notiamo che, a differenza delle funzioni analitiche, il simbolo di divisione introdotto *non* è ristretto ma globale.

Osservazione 3.5. Il grafico della funzione D e il suo complemento sono definibili in $\mathbb{R}_{\text{an}}$ tramite formule prive di quantificatori.
Infatti, la condizione "$D(x, y) = z$" è espressa dalla formula $\varphi_D(x, y, z)$ data da

$$(y = 0 \wedge z = 0) \vee (y \neq 0 \wedge z \cdot y = x).$$

L'osservazione appena vista ci permette di mostrare che, a meno di aggiungere quantificazioni esistenziali, lavorare con $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$ è sostanzialmente equivalente a lavorare con $\mathcal{L}_{\text{an}}$:

Proposizione 3.6 (da $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$ a $\mathcal{L}_{\text{an}}$)**.** *Sia $\varphi(\bar{x})$ una formula di $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$ senza quantificatori. Allora esiste ψ una formula di $\mathcal{L}_{\text{an}}$ senza quantificatori tale che*

$$\mathbb{R}_{\text{an}}^D \models (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_n \, \psi(\bar{x}, \bar{y}))$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di occorrenze del simbolo D.
Nel caso base $n = 0$, non c'è nulla da dimostrare.

Per il passo induttivo, sia $\varphi = \varphi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$-formula senza quantificatori contenente $n+1$ occorrenze del simbolo D. Consideriamo una delle occorrenze più interne, ovvero tale che possiamo scrivere $\varphi(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x}, D(t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x})))$ per un'opportuna formula $\varphi'(\bar{x}, z)$, dove t_1, t_2 sono $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$-termini che non contengono alcuna occorrenza di D.
Adesso trasformiamo la formula in una forma equivalente:

$$\mathbb{R}_{\mathrm{an}}^D \models \varphi'(\bar{x}, D(t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x}))) \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{R}_{\mathrm{an}}^D \models \exists z_1, z_2, z_3\, (t_1(\bar{x}) = z_1 \wedge t_2(\bar{x}) = z_2 \wedge D(z_1, z_2) = z_3 \wedge \varphi'(\bar{x}, z_3))$$

A questo punto, possiamo sostituire l'espressione $D(z_1, z_2) = z_3$ con la sua definizione in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$, e applicare l'ipotesi induttiva a φ' (che ha almeno un'occorrenza di D in meno) per trasformare la formula trovata in una $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$-formula esistenziale equivalente in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$.

□

Fatte queste premesse, enunciamo il risultato principale che vogliamo mostrare.

Teorema 3.7 (Denef-van den Dries, 1988)**.** *La teoria T_{an}^D ammette eliminazione dei quantificatori.*

Innanzitutto, il passaggio di formule da $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$ a $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$ permette di ottenere come corollario il seguente risultato, altrettanto importante.

Corollario 3.8. *La teoria T_{an} è model-completa.*

Dimostrazione. Sia φ una $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$-formula. Naturalmente φ si può vedere come una $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$-formula, per cui per il [Teorema] esiste una $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$-formula ψ_0 priva di quantificatori tale che $T_{\mathrm{an}}^D \models \varphi \leftrightarrow \psi_0$. Per la [proposizione], ψ_0 equivale a una formula esistenziale ψ_1 nel linguaggio $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$. Allora.

$$\mathbb{R}_{\mathrm{an}} \models \varphi \leftrightarrow \psi_1, \quad \text{cioè} \quad T_{\mathrm{an}} \models \varphi \leftrightarrow \psi_1$$

il che mostra la model-completezza di T_{an}. □

Da adesso in poi ci addentreremo nella dimostrazione del teorema di Denef-van den Dries. Il setting è ancora quello del criterio 1.34, ovvero $M_1, M_2 \models T_{\mathrm{an}}^D$, con $K \subseteq M_1$ un sottocampo, $e\colon K \to M_2$ un'immersione, $a \in M_1$, e l'obiettivo è estendere l'immersione e ad un'immersione e' che sia definita su $K\langle a\rangle$. Qui, la struttura $K\langle a\rangle$ contiene tutti quegli elementi di M_1 esprimibili come termini di $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$ in funzione di elementi di K e a, quindi ottenibili da $K \cup \{a\}$ tramite funzioni analitiche (ristrette), operazioni algebriche e divisione.

Osservazione 3.9. Sia M un modello di T^D_{an}. Innanzitutto M, dovendo interpretare le funzioni analitiche ristrette, ha un'interpretazione per le funzioni analitiche costanti, ovvero $\{r\}_{r\in\mathbb{R}}$, che devono rappresentare elementi tutti a due a due distinti perché tali sono in $\mathbb{R}^D_{\text{an}}$. Ciò significa che, in ogni modello $M \models T^D_{\text{an}}$, possiamo identificare le interpretazioni di queste funzioni costanti con $\mathbb{R}$ stesso, e scrivere $\mathbb{R} \subseteq M$. Più in generale, per lo stesso motivo, anche se $K \subseteq M$ è una sottostruttura di un modello, vale comunque $\mathbb{R} \subseteq K$. Inoltre, una immersione $e\colon K \to M_2$, con $M_2 \models T^D_{\text{an}}$, fissa tutte queste costanti, ovvero $e|_{\mathbb{R}}$ è l'identità. Dato che M è un campo dotato di una relazione d'ordine totale, ha senso parlare del valore assoluto di un elemento. Dunque, notiamo che le funzioni analitiche ristrette sono effettivamente "ristrette" anche nei modelli M non standard (cioè tali che $\mathbb{R} \subsetneq M$): ha senso scrivere che $f_r(\bar{x}) = 0$ se $|\bar{x}| > r$.

Le idee di fondo della dimostrazione sono le stesse idee presentate all'inizio della dimostrazione del teorema di Tarski. Per estendere le immersioni vogliamo capire come si comportano gli elementi $\bar{\alpha} \in M_1^n$ nelle formule atomiche, e trovarne una caratterizzazione più semplice per poterla "trasportare" in M_2 e trovare le immagini di questi elementi tramite l'immersione estesa, che indicheremo con $e'(\bar{\alpha})$.
Per il teorema di Tarski, preso un elemento α soluzione di un sistema polinomiale

$$p(\alpha) = 0, q_1(\alpha) > 0, \dots, q_k(\alpha) > 0,$$

abbiamo trovato una condizione della forma $p(\alpha) = 0 \land \ a < \alpha < b$ che garantiva che il sistema fosse soddisfatto, e infine abbiamo mostrato che un β adatto che soddisfacesse $p^e(\beta) = 0 \land e(a) < \beta < e(b)$ avrebbe soddisfatto anch'esso il sistema, ottenendo da questo la possibilità di estendere le immersioni. Qui, vogliamo effettuare un'operazione simile: se $\bar{\alpha} \in M$ soddisfano un sistema di funzioni analitiche

$$f(\bar{\alpha}, \bar{c}) = 0, g_1(\bar{\alpha}, \bar{c}) > 0, \dots, g_k(\bar{\alpha}, \bar{c}) > 0$$

(dove $\bar{c}$ sono dei parametri in K), cerchiamo una condizione più semplice. Mostreremo che $f(\bar{\alpha}, \bar{c}) = 0$ si può scrivere equivalentemente come $\theta(h_1, \dots, h_m)$, dove $\theta(z_1, \dots, z_m)$ è una formula di $\mathcal{L}_{\text{or}}$: contiene *soltanto simboli algebrici*, ma è applicata a termini $h_1, \dots, h_m \in K$, a cui possiamo applicare l'immersione e. A questo punto entra in gioco il teorema di Tarski: ci dice che θ può essere presa senza quantificatori, quindi è adatta ad essere "trasportata" in M_2, e da qui procediamo come prima.

Ciò che vogliamo ottenere, insomma, è la possibilità di manipolare formule atomiche di $\mathcal{L}_{\text{an}}$ del tipo $f_r(\bar{x}, \bar{c}) = 0, f_r(\bar{x}, \bar{c}) > 0$ ($c \in K$ parametri) e far sì che certe variabili non compaiano più nell'argomento di una funzione analitica f_r, ma occorrano solo *polinomialmente.* Con questo scopo in mente, presenteremo dei teoremi che descrivono il comportamento *locale* (le funzioni analitiche sono ristrette) delle funzioni analitiche.

3.2 Lemmi algebrici

Il seguente è un risultato classico, che non dimostriamo.

Proposizione 3.10 (Teorema di preparazione di Weierstrass)**.** *Sia* $f \in \mathbb{R}\{\bar{x}, y\}$ *una funzione analitica,* $f(0, y) \not\equiv 0$*. Allora, esistono* $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$*,* $u \in \mathbb{R}\{\bar{x}, y\}$ *analitiche, con* $a_1(0) = \dots, = a_p(0) = 0$*,* $u(0,0) \neq 0$*, per cui vale la scrittura*

$$f(\bar{x}, y) = u(\bar{x}, y) \cdot \left(y^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\bar{x}) y^i \right)$$

per un certo intero $p \in \mathbb{N}$ *e per tutti gli* x *sufficientemente piccoli.*

Dire che una $f(\bar{x}, y)$ soddisfa $f(0, y) \not\equiv 0$ è equivalente a richiedere che le derivate $\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(0, y)$ non siano tutte nulle. Se p è il minimo intero i per cui questa derivata non si annulla, diciamo che f è *regolare di ordine* p. Questo p è lo stesso che compare nell'enunciato del teorema.

Il seguente risultato è stato invece dimostrato in **??**. La sua dimostrazione utilizza manipolazioni algebriche e proprietà dell'anello delle serie di potenze $\mathbb{R}[[\bar{x}]]$, per cui non riporteremo la dimostrazione. Nell'enunciato utilizziamo una notazione compatta per i multi-indici delle serie di potenze: dato $\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$, scriviamo $|\bar{k}| = k_1 + \dots + k_n$, e $\bar{y}^{\bar{k}} = y_1^{k_1} \cdots y_m^{k_m}$.

Proposizione 3.11 (Teorema di preparazione di Denef - van den Dries)**.** *Consideriamo* $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$*. Esiste un* $d \in \mathbb{N}$ *per cui*

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^m, |k| < d} a_k(\bar{x}) \bar{y}^k u_k(\bar{x}, \bar{y})$$

per certe $u_k \in \mathbb{R}\{\bar{x}, \bar{y}\}$ *che non si annullano in* $(0,0)$ *ed* $a_k \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$*.*

Abbiamo osservato, nel paragrafo precedente, che vogliamo studiare meglio le formule $f(\bar{x}, \bar{c}) = 0, f(\bar{x}, \bar{c}) > 0$ e il loro comportamento locale per semplificarne la scrittura. Studiamo innanzitutto il caso in cui i parametri siano infinitesimi. Prima dell'ultimo lemma algebrico, avremo bisogno di alcuni strumenti tecnici.

Definizione 3.12. Dato $M \models T_{\text{an}}$, definiamo il sottoanello degli infinitesimi $\mu = \mu(M) = \{x \in M \mid |x| < r \ \forall r \in \mathbb{R}_{>0}\}$

Osservazione 3.13. Se $M = \mathbb{R}$, allora si vede subito che $\mu(M) = \{0\}$. Se invece M è un modello non-standard, $\mathbb{R} \subsetneq M$, allora $\mu(M) \supsetneq \{0\}$, vi sono in M elementi infinitesimi non-standard, e naturalmente anche i loro inversi, ovvero gli elementi infiniti (maggiori di ogni numero reale in valore assoluto). Chiamiamo *finiti* gli elementi compresi in modulo tra due reali.

Osservazione 3.14 (-definizione: parte standard). Sia M un modello di T^D_{an}. Dato $b \in M$, consideriamo l'insieme
$$B = \{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid x < b\}.$$
Possono presentarsi i seguenti casi:

- B è vuoto. Allora b è un infinitesimo.
- $B = \mathbb{R}_{>0}$. Allora b è infinito, e $1/b \in \mu$.
- B non vuoto e superiormente limitato in $\mathbb{R}$, $s = \sup B$. In questo caso b è finito, s è detta parte standard di b. Allora $b - s \in \mu$, e la parte standard $s \in \mathbb{R}$ è univocamente determinata dalla condizione $b - s \in \mu$, per cui si può anche indicare senza ambiguità come $\mathrm{st}(b)$.

Osservazione 3.15. Una funzione $f \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$ ammette una scrittura in serie di potenze che converge sull'insieme $[-\varepsilon, \varepsilon]^n$ per un certo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. In particolare, il corrispondente simbolo di funzione dà una ben definita funzione su $\mu(M)$, che non è troncata, dato che non è troncata in $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 3.16. Dato $M \models T^D_{\mathrm{an}}$, introduciamo la funzione $\Lambda = \Lambda_d \colon M^n \to M^n$, dipendente da un intero $d \in \mathbb{N}$, definita da
$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 + y_n^{d^{n-1}}, y_2 + y_n^{d^{n-2}}, \dots, y_{n-1} + y_n^d, y_n).$$
La funzione Λ è una bigezione, ed anche la sua restrizione agli infinitesimi $\Lambda|_{\mu^n}$ manda μ^n bigettivamente in sé.

Utilizzeremo questa mappa riferendoci ad essa come Λ per il resto del capitolo. Essa serve a garantire che sia soddisfatta l'ipotesi tecnica (*regolare di ordine* p) nel teorema di preparazione di Weierstrass, come vediamo nel lemma seguente.

Lemma 3.17 (Lemma locale). *Fissiamo un modello $M \models T^D_{\mathrm{an}}$ e dei parametri infinitesimi $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mu$. Indicando $\bar{y} = (\bar{y}', y_m) = (y_1, \dots, y_{m-1}, y_m)$, sia $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}\{\bar{x}, \bar{y}\}$ una funzione analitica.*
Esistono:

- *parametri infinitesimi $k_1, \dots, k_d \in \mu^n$, esprimibili come $\mathcal{L}^D_{\mathrm{an}}$-termini in funzione di $\bar{c}$*
- *una funzione analitica $Q \in \mathbb{R}\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ non nulla in $(0, 0, 0)$*
- *funzioni $h_1, \dots, h_p \in \mathbb{R}\{\bar{x}, \bar{y}', \bar{z}\}, a \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$*
- *un $\varepsilon > 0$*

tali che, per ogni $\bar{y} \in M^m$ con $|\bar{y}| \leq \varepsilon$, vale

$$M \models f(\bar{c}, \Lambda(\bar{y})) = |a(\bar{c})| Q(\bar{c}, \bar{y}, \bar{k}) \cdot \left(y_m^p + \sum_{i=1}^{p} h_i(\bar{c}, \bar{y}', \bar{k}) y_m^{p-i} \right)$$

Dimostrazione. Vediamo innanzitutto il caso $m = 1$.
Dalla proposizione 3.11, scriviamo $f(\bar{x}, y_1) = \sum_{i<d} a_i(\bar{x}) y_1^i u_i(\bar{x}, y_1)$, $a_i \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$, $u_i \in \mathbb{R}\{\bar{x}, y_1\}$ non nulle in $(0,0)$.
Fissando un ε in modo che tutte le funzioni di questa espressione convergano su $[-\varepsilon, \varepsilon]^n$, l'identità

$$f_\varepsilon(\bar{x}, y_1) = \sum_{i<d} a_{i,\varepsilon}(\bar{x}) y_1^i u_{i,\varepsilon}(\bar{x}, y_1)$$

è proprio una $\mathcal{L}_{\text{an}}$-formula verificata da $\mathbb{R}_{\text{an}}$, quindi appartenente alla teoria T_{an}. Ciò significa che questa è anche un'identità tra le corrispondenti funzioni in M. Notiamo che se $a_i(\bar{c}) = 0$ per tutti gli i allora la tesi è banalmente vera con Q e h_j arbitrarie, $a(\bar{c}) \equiv 0$. Supponiamo allora che esista un $a_i(\bar{c}) \neq 0$. Scegliamo l'indice $i_0 < d$ che massimizza $|a_i(\bar{c})|$ (in particolare, $|a_{i_0}(\bar{c})| \neq 0$).
Per $i < d$, chiamiamo

$$k_i' = \frac{a_i(\bar{c})}{|a_{i_0}(\bar{c})|}.$$

Vale $|k_i|' \leq 1$, $k_{i_0}' = \pm 1$. Usando la proposizione [parte standard], possiamo scrivere $k_i' = k_i + s_i$ con $k_i \in \mu(M), s_i \in \mathbb{R}$. In particolare, $k_{i_0} = 0, s_{i_0} = \pm 1$.
A questo punto, possiamo scrivere $f_\varepsilon(\bar{c}, y_1) = |a_{i_0}(\bar{c})| g_\varepsilon(\bar{c}, y_1, \bar{k})$, dove

$$g(\bar{x}, y, \bar{z}) = s_{i_0} u_{i_0}(\bar{x}, y) y^{i_0} + \sum_{i<d, i \neq i_0} u_i(\bar{x}, y)(z_i + s_i) y^i$$

è una ben definita funzione analitica in $\mathbb{R}\{\bar{x}, y_1, \bar{z}\}$.
Ora vogliamo applicare il teorema di preparazione di Weierstrass alla funzione g per ottenere una scrittura come nella tesi. Perciò, verifichiamo che $g(0, y, 0) \not\equiv 0$. Basta verificare che lo sviluppo in serie non sia identicamente nullo, e in effetti,

$$g(0, y, 0) = \sum_{i<d} u_i(0, y) s_i y^i = u_p(0, 0) s_p y^p + \sum_{j>0} s_p \alpha_j y^{j+p} + \sum_{j>p} u_j(0, y) s_j y^j$$

dove p è il minimo indice i per cui s_i non è nullo, e gli α_j sono i coefficienti dello sviluppo in serie di $u_p(0, y)$.
Applicando il teorema 3.10, scriviamo

$$g(\bar{x}, y, \bar{z}) = Q(\bar{x}, y_1, \bar{z})(y_1^p + h_1(\bar{x}, \bar{z}) y_1^{p-1} + \cdots + h_p(\bar{x}, \bar{z})) \tag{3.1}$$

e questa identità è vera anche tra le corrispondenti funzioni troncate a ε, per cui infine

$$f_\varepsilon(\bar{c}, y_1) = |a_{i_0,\varepsilon}(\bar{c})| g_\varepsilon(\bar{c}, y_1, \bar{k}) = |a_{i_0,\varepsilon}(\bar{c})| Q_\varepsilon(\bar{c}, y_1, \bar{k})(y_1^p + \cdots + h_{p,\varepsilon}(\bar{c}, \bar{k})) \tag{3.2}$$

come voluto.
Caso m generico.

Procediamo come sopra per ottenere una scrittura del tipo

$$g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = s_{\nu_0} u_{\nu_0} y^{\nu_0} + \sum_{|\nu|<d, \nu \neq \nu_0} u_\nu(\bar{x}, \bar{y})(z_\nu + s_\nu)\bar{y}^\nu.$$

Stavolta non abbiamo la garanzia che su g si possa applicare il teorema 3.10. Tuttavia, utilizziamo la bigezione $\Lambda = \Lambda_d$ introdotta sopra, dove d è l'intero che compare nello sviluppo appena scritto, dato dal teorema di preparazione di Denef-van den Dries. Allora possiamo scrivere

$$g(\bar{0}, \Lambda(\bar{0}', y_m), \bar{0}) = \sum_{|\nu|<d} u_\nu(\bar{0}, \Lambda(\bar{0}, y_m)) s_\nu y_m^{\nu_1 d^{m-1} + \nu_2 d^{m-2} + \dots + \nu_m}$$

Avendo applicato Λ ci siamo ricondotti ad una scrittura in cui gli esponenti di y_m sono tutti distinti. Dunque si può scegliere $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ minimo (rispetto all'ordinamento lessicografico) per cui $s_\nu \neq 0$, e si ottiene che g rientra tra le ipotesi del teorema di Weierstrass (stavolta $p = \nu_1 d^n + \dots + \nu_m$). Allora, come sopra,

$$f_\varepsilon(\bar{c}, \Lambda(\bar{y})) = |a_{\nu_0,\varepsilon}(\bar{c})| Q_\varepsilon(\bar{c}, \bar{y}, \bar{k})(y_m^p + \dots + h_{p,\varepsilon}(\bar{c}, \bar{y}', \bar{k}).$$

□

3.3 Semplificazione delle formule

Come detto nei paragrafi precedenti, vogliamo fare in modo che una $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$-formula priva di quantificatori possa essere semplificata il più possibile, eliminando sia le occorrenze del simbolo di divisione sia i simboli di funzione analitica, ed alla fine anche i quantificatori. Lo facciamo perché le formule semplici passano meglio da un modello all'altro: lo abbiamo notato nel commento alla Proposizione 1.32, e lo useremo nel Teorema 3.20. In questo spirito, i lemmi algebrici del paragrafo precedente servono a semplificare la scrittura delle funzioni analitiche, facendo in modo che almeno una variabile possa occorrere polinomialmente, e ciò risulta utile per il lemma seguente.

Introduciamo un dettaglio di notazione per il seguente enunciato: indichiamo con $\exists_\varepsilon y$ l'espressione $\exists y\,(|y| < \varepsilon \wedge \dots)$.

Lemma 3.18 (Eliminazione di un $\exists$). *Sia $M \models T_{\text{an}}^D$, $\bar{c} \in \mu^n$, e sia φ una congiunzione di formule di $\mathcal{L}_{\text{an}}$ del tipo*

$$f_r(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \quad \textit{oppure} \quad f_r(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Allora esistono funzioni analitiche $h_1, \dots, h_q$, parametri $\bar{k} \in \mu(M)^d$ definibili in $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$ a partire da $\bar{c}$, e una $\mathcal{L}_{\text{or}}$-formula ψ priva di quantificatori, tali che

$$M \models \exists_\varepsilon\, y_1 \dots, y_{n+1}\, \varphi(\bar{c}, \bar{y}) \leftrightarrow \exists_{\varepsilon'}\, y_1, \dots, y_n\, \psi(h_1(\bar{c}, \bar{y}', \bar{k}), \dots, h_q(\bar{c}, \bar{y}', \bar{k}), \bar{y}').$$

Dimostrazione. Preliminarmente, utilizziamo la trasformazione Λ introdotta nella definizione 3.16: dato che è una bigezione da M^{n+1} in sé, allora vale

$$M \models \exists_\varepsilon y_1 \dots, y_{n+1}\, \varphi(\bar{c}, \bar{y}) \Leftrightarrow M \models \exists'_\varepsilon y_1, \dots, y_{n+1}\, \varphi(\bar{c}, \Lambda(\bar{y})).$$

Da ora scriviamo ε al posto di ε' per semplicità.
Utilizziamo il risultato del lemma locale 3.17 per notare che esiste un $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che per $|y| < \varepsilon$ valga una scrittura del tipo

$$M \models f(\bar{c}, \Lambda(\bar{y})) = |a(\bar{c})| Q(\bar{c}, \bar{y}, \bar{k}) \cdot \left(y_{n+1}^p + \sum_{i=1}^{p} h_i(\bar{c}, y_1, \dots, y_n, \bar{k}) y_{n+1}^{p-i} \right) \tag{3.3}$$

per ogni simbolo di funzione f che appare in φ. Possiamo supporre che l'ε sia lo stesso per tutte le f, a meno di restringerlo.
Inoltre, restringendo ancora, possiamo fare l'ulteriore ipotesi che le Q abbiano segno costante su $B_\varepsilon = \{|\bar{x}|, |\bar{y}|, |\bar{z}| \leq \varepsilon\}$, infatti per ipotesi $Q(0,0,0) \neq 0$, inoltre per continuità

$$T_{\text{an}}^D \models \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in B_\varepsilon \left(|Q_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - Q_\varepsilon(0,0,0)| < |Q_\varepsilon(0,0,0)|/2 \right) \tag{3.4}$$

Mettendo insieme 3.3 e 3.4, scegliendo $\pm$ in base al segno di $Q(0,0,0)$, si ottiene che

$$M \models f_\varepsilon(\bar{c}, \Lambda(\bar{y})) > 0 \leftrightarrow \pm \left(y_{n+1}^p + \sum_{i=1}^{p} h_{i,\varepsilon}(\bar{c}, y_1, \dots, y_n, \bar{k}) y_{n+1}^{p-i} \right) > 0$$

e si ha un'equivalenza analoga con $=$ al posto di $>$.
In pratica, abbiamo eliminato la dipendenza da molte delle funzioni analitiche che comparivano nell'espressione di φ, lasciando solo le h_i, inoltre adesso la dipendenza da y_{n+1} è solo polinomiale. Dimenticandosi temporaneamente anche delle h_i e mettendo delle nuove variabili al loro posto, consideriamo la L_{or}-formula $\theta(z_1, \dots, z_q, y)$ ottenuta da φ sostituendo $f_r(\bar{x}, \bar{y})$ con $\pm(y^p + z_1 y^{p-1} + \dots + z_p)$ in ogni sottoformula $f_r(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ o $f_r(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Sopra abbiamo dimostrato che in M la formula $\varphi(\bar{c}, \bar{y})$ equivale a $\theta(\overline{h_i(\bar{c}, \bar{y}', \bar{k})}, y_{n+1})$. Applicando un quantificatore esistenziale

$$M \models \exists_\varepsilon y_{n+1}\, \varphi(\bar{c}, \bar{y}) \leftrightarrow \exists_\varepsilon y_{n+1}\, \theta(\overline{h_i(\bar{c}, \bar{y}', \bar{k})}, y_{n+1}).$$

Dal momento che θ è una formula di $\mathcal{L}_{\text{or}}$, per il Teorema di Tarski si ha

$$T_{\text{RCF}} \models \exists_\varepsilon y_{n+1}\ \theta(\bar{z}, y_{n+1}) \leftrightarrow \psi(\bar{z})$$

per una certa ψ senza quantificatori. Naturalmente, la stessa equivalenza, ma con $h_i(\bar{c}, \bar{y}', \bar{y})$ al posto di $\bar{z}$, vale in T_{an}^D, e ciò dà la tesi. □

Torniamo al setting di partenza, in cui abbiamo M_1, M_2, K, e al solito. A priori, applicando separatamente il teorema appena dimostrato ai modelli M_1, M_2, la formula ψ ottenuta per M_1 potrebbe non avere nulla a che vedere con quella ottenuta per M_2. Il lemma ausiliario seguente ci sarà utile per dimostrare che in realtà, a meno di applicare l'immersione e ai parametri $\bar{c}, \bar{k}$, le due ψ coincidono.

Lemma 3.19. *Siano $M_1, M_2 \models T^D_{\mathrm{an}}$, $K \subseteq M_1$ sottostruttura, $e\colon K \to M_2$ immersione. Supponiamo che M_1 sia un modello non standard, cioè $\mu = \mu(M_1) \neq \{0\}$. Consideriamo poi un simbolo di funzione analitica h_r del linguaggio e dei parametri $c_1, \dots, c_m \in K \cap \mu$. Se $M_1 \models \forall \bar{y} \in \mu \;\; h(\bar{c}, \bar{y}) = 0$, allora vale l'uguaglianza sia in M_1 che in M_2 senza la limitazione $\bar{y} \in \mu$, ovvero*

$$M_1 \models \forall \bar{y}\, h_r(\bar{c}, \bar{y}) = 0, \qquad M_2 \models \forall \bar{y}\, h_R(e(\bar{c}), \bar{y}) = 0.$$

Dimostrazione. Lavorando in $\mathbb{R}^D_{\mathrm{an}}$, fissiamo $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Dalla teoria delle funzioni analitiche, è noto che se una qualsiasi funzione analitica $g(\bar{y}) = h(\bar{x}, \bar{y})$ si annulla su tutta una palla centrata in 0 in $\mathbb{R}^n$, allora $g(\bar{y}) \equiv 0$. Basta esprimere questo concetto con una formula del primo ordine nel linguaggio $\mathcal{L}^D_{\mathrm{an}}$ appartenente alla teoria T^D_{an}, in modo tale che tutti i suoi modelli la verifichino.
Scriviamo allora:

$$\forall \bar{x}\, \big(\big(\exists r\, \forall y_1, \dots, y_n\, (y_1^2 + \dots + y_n^2 < r^2 \to h(\bar{x}, \bar{y}) = 0)\big) \to \forall \bar{y}\, h(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \big),$$

ed è una ben definita formula del primo ordine verificata da $\mathbb{R}^D_{\mathrm{an}}$, ovvero $\varphi \in T^D_{\mathrm{an}}$. Considerando adesso un qualunque elemento $r \in \mu \setminus \{0\}$, si vede che M_1 verifica l'antecedente dell'implicazione all'interno di $\forall \bar{x}$, con $\bar{c}$ al posto di $\bar{x}$. Perciò M_1 soddisfa anche il conseguente, cioè $M_1 \models \forall \bar{y}\, h(\bar{c}, \bar{y}) = 0$ come voluto.
Applicando e, si ottiene allora che per ogni $y \in e(K) \subseteq M_2$ vale $h(\bar{c}, \bar{y}) = 0$. Ragionando come sopra, si ottiene la tesi anche per M_2. □

3.4 Estensione delle immersioni

Lemma 3.20. *Siano M_1, M_2 modelli di T^D_{an}, K una sottostruttura di M_1, $e\colon K \to M_2$ immersione.*
Sia $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ una congiunzione di formule del tipo $f(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ o $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, e supponiamo che esistano parametri $c_1, \dots, c_m \in K \cap \mu(M_1)$, elementi $a_1, \dots, a_n \in \mu(M_1)$, per cui $M_1 \models \varphi(\bar{c}, \bar{a})$. Allora esistono elementi $b_1, \dots, b_n \in M_2$ tali che $M_2 \models \varphi(e(\bar{c}), \bar{b})$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.
Nel caso $n = 1$, fissiamo dei $c_1, \dots, c_m \in K \cap \mu(M_1)$. Per il lemma 3.18, esistono funzioni analitiche $h_1, \dots, h_q$ e $k_0, dots, k_{d-1} \in \mu(M_1)$ per cui vale

$$M_1 \models \exists y\, \varphi(\bar{c}, y) \leftrightarrow \psi(h_1(\bar{c}, \bar{k}), \dots, h_q(\bar{c}, \bar{k}))$$

con ψ una $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-formula senza quantificatori. Inoltre, dall'enunciato del lemma 3.17, sappiamo che i k_j sono definibili come $\mathcal{L}^D_{\mathrm{an}}$-termini dipendenti da $\bar{c}$. Poiché K è una $\mathcal{L}^D_{\mathrm{an}}$-sottostruttura di M_1 (quindi chiusa per l'interpretazione dei termini) si ha $k_j \in K$ per ogni

j.
Per ipotesi, in M_1 è vero il primo membro dell'equivalenza sopra, quindi anche il secondo. La funzione e, essendo una immersione tra $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$-strutture, è in particolare una immersione tra $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$-strutture, dunque preserva le formule senza quantificatori. Da ciò segue che

$$M_2 \models \psi(e(h_1(\bar{c},\bar{k})),\dots,e(h_q(\bar{c},\bar{k})))$$

e per le proprietà delle immersioni

$$M_2 \models \psi(h_1(e(\bar{c}),e(\bar{k})),\dots,h_q(e(\bar{c}),e(\bar{k}))-).$$

Per ottenere la tesi, vogliamo mostrare che anche in M_2 quest'ultima formula è equivalente a $\exists y\,\varphi(e(\bar{c}),y)$. Da ciò si conclude considerando un testimone b di questa formula esistenziale. Per mostrare questo, bisogna ripercorrere il modo in cui l'equivalenza è stata ottenuta in M_1, che abbiamo visto nella dimostrazione del lemma 3.17. Come primo passo, abbiamo ottenuto l'uguaglianza tra f e g (equazione 3.2), dove g è stata scritta come nell'equazione 3.1, in cui abbiamo utilizzato un'identità di $\mathbb{R}\{\bar{x},y,\bar{z}\}$ (vera in ogni modello, perché vera in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}^D$). Infine abbiamo utilizzato la continuità di Q (anche questa vera in ogni modello).
L'unico passaggio problematico è la riproposizione dell'equazione 3.1: bisogna verificare che il primo passo si può effettuare identico in M_2, e per questo basta applicare il lemma 3.19 con $f_\varepsilon(\bar{c},\bar{y})-|a_{i_0,\varepsilon}(\bar{c})|g(\bar{c},\bar{y},\bar{k})$ al posto di h.

Per il passo induttivo, di nuovo dal lemma 3.18, otteniamo che φ preceduta da $n+1$ quantificatori esistenziali equivale (sia in M_1 che in M_2 tramite e, applicando ancora il lemma 3.19) ad un'altra $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$-formula con soli n esistenziali. Dall'ipotesi induttiva segue la tesi. $\square$

Corollario 3.21. *Siano M_1, K, M_2 come sopra, M_2 sufficientemente satura. Data una qualsiasi immersione $e\colon K \to M_2$, esiste una mappa $e'_\mu\colon K\langle a\rangle \cap \mu \to M_2$ che estende $e_\mu = e|_{K\cap\mu}$ e preserva le formule atomiche: per ogni $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in K\langle a\rangle\cap\mu$, per ogni simbolo f di funzione analitica ristretta vale:*

$$M_1 \models f(\bar{\alpha}) > 0 \implies M_1 \models f(e'_\mu(\bar{\alpha})) > 0,$$
$$M_2 \models f(\bar{\alpha}) = 0 \implies M_2 \models f(e'_\mu(\bar{\alpha})) = 0$$

Dimostrazione. Dato $\alpha \in K\langle a\rangle\cap\mu$ vogliamo decidere $e'_\mu(\alpha)$. Per farlo, vogliamo considerare il tipo in infinite variabili delle formule con parametri da K verificate dagli elementi di $K\langle a\rangle\cap\mu$, e realizzare questo tipo in M_2.
Scriviamo $K\langle a\rangle\cap\mu = \alpha_{i i\in I}$. Concretamente l'insieme di formule considerato è

$$\begin{aligned}\Sigma(\{x_i\}_{i\in I}) = \{&f_r(x_{i_1},\dots,x_{i_n},e(c_1),\dots,e(c_m))>0, g_r(x_{i_1},\dots,x_{i_n},\bar{e}(c_1),\dots,e(c_m))=0 \mid\\ &n,m\in\mathbb{N},\ f_r,g_r \text{ simboli di funzione } (n+m)\text{-aria}, i_1,\dots,i_n\in I,\\ &c_1,\dots,c_m\in K\cap\mu,\ M_1\models f_r(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n},\bar{c})>0\wedge g_r(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n},\bar{c})=0\}.\end{aligned}$$

Il Lemma 3.20 afferma che l'insieme di formule appena definito, che chiameremo semplicemente Σ, è finitamente soddisfacibile in M_2, cioè è effettivamente un tipo. Allora, utilizzando la saturazione di M_2 (vedi Teorema 1.36), è anche realizzabile da $\{\beta_i\}_{i\in I} \subseteq M_2$. Definiamo l'immersione ponendo $e'_\mu(\alpha_i) = \beta_i$ per ogni $i \in I$.
Per costruzione, i β_i soddisfano tutte le formule atomiche che vengono soddisfatte dagli α_i, per cui la mappa e'_μ così definita è effettivamente una immersione.
Inoltre, per verificare che e'_μ estende e_μ, basta osservare il seguente fatto: se $c = \alpha_i \in K \cap \mu$, allora soddisfa la formula $\varphi(x) \equiv x = c$. Ciò implica che l'immagine β_i soddisfa la corrispondente formula $x = e(c)$ nel tipo Σ, per cui $e'_\mu(c) = e(c) = e_\mu(c)$ come voluto. $\square$

Finora abbiamo lavorato con gli infinitesimi per comodità, soprattutto perché è possibile usare le funzioni analitiche ristrette su essi senza preoccuparsi che le funzioni stesse vengano troncate. Ci resta da mostrare che lavorare con gli infinitesimi non è restrittivo.

Lemma 3.22 (Infinitesimi)**.** *Siano $M_1, M_2 \models T^D_{\mathrm{an}}$, $K \subseteq M_1$ un sottocampo, M_2 sufficientemente satura. Fissiamo un'immersione $e\colon K \to M_2$ e un elemento $a \in K$. Vogliamo estendere e ad un'immersione $e'\colon K\langle a\rangle \to M_2$.*
Indichiamo $\mu = \mu(M_1)$ e supponiamo di avere un'estensione di e ristretta agli infinitesimi, cioè una mappa $e'_\mu\colon K\langle a\rangle \cap \mu \to M_2$ che estende $e_\mu = e|_{K\cap\mu}$ e che preserva le formule del tipo $f(b_1,\dots,b_n) > 0$, $f(b_1,\dots,b_n) = 0$ come nel Corollario 3.21.
Allora e'_μ si estende ad una immersione e' definita su $K\langle a\rangle$ che estende anche e.

$$
\begin{tikzcd}
K \cap \mu \arrow[r] \arrow[d] & K\langle a\rangle \cap \mu \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "e'_\mu"] & \\
K \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "e"'] & K\langle a\rangle \arrow[r, dotted, "e'"] & M_2
\end{tikzcd}
$$

Dimostrazione. Notiamo intanto che e'_μ è iniettiva, poiché preserva le formule $x_1 - x_2 = 0$. Sia $b \in K\langle a\rangle$. Possono presentarsi i seguenti casi:

- $b \in \mu$. Poniamo naturalmente $e'(b) = e'_\mu(b)$.
- b è infinito, ovvero $1/b \in \mu$. In questo caso, definiamo $e'(b) = 1/e'_\mu(1/b)$.
- b è finito, $s = \mathrm{st}(b) \in \mathbb{R}$ è la sua parte standard. Allora $b - s \in \mu$, per cui poniamo $e'(b) = e'_\mu(b - s) + s$.

Innanzitutto, e' così definito è un omomorfismo di anelli (campi) ordinati tra $K\langle a\rangle$ e M_2, e in particolare preserva il simbolo D. Per mostrarlo, sia $b \in K\langle a\rangle$. Allora:

- e' preserva l'ordine, cioè se $b > 0$ vale $e'(b) > 0$. Infatti, se $b \in \mu$ è l'ipotesi su e'_μ. Se b è finito si ha necessariamente $s > 0$, ma $b - s \in \mu$ da cui $e'(b - s) = e'_\mu(b - s) \in \mu$, quindi $e'_\mu(b-s)+s$ è ancora positivo. Se invece b è infinito, poiché invertire un numero non ne cambia il segno e e'_μ preserva l'ordine, si ha $1/e'_\mu(1/b) > 0$.

- Siano $b_1, b_2 \in K\langle a\rangle$. Mostriamo che $e'(b_1) + e'(b_2) = e'(b_1 + b_2)$. Se sono entrambi infinitesimi, è l'ipotesi su e_μ. Se sono entrambi finiti, segue subito dall'additività della parte standard. Vediamo il caso in cui $b_1, b_2, b_1 + b_2$ siano tutti infiniti. Bisogna verificare $1/e'_\mu(1/b_1) + 1/e'_\mu(1/b_2) + 1/e'_\mu(1/(b_1 + b_2))$. Questo si riscrive come

$$0 = f(e'_\mu(1/b_1), e'_\mu(1/b_2), e'_\mu(1/(b_1 + b_2)) = e'_\mu(f(1/b_1, 1/b_2, 1/(b_1 + b_2))),$$

  dove $f(x, y, z) = yz+xz-xy$. Per l'iniettività di e'_μ, basta vedere $f(1/b_1, 1/b_2, 1/(b_1+b_2)) = 0$, e questa è un'identità.
  Bisognerebbe esaminare tutti gli altri casi con $b_1, b_2, b_1 + b_2$ infinitesimi, finiti o infiniti, ma si risolvono in modo simile e non li scriveremo per non appesantire la dimostrazione.

- Anche la verifica $e'(b_1) \cdot e'(b_2) = e'(b_1 \cdot b_2)$ si realizza come al punto precedente.

Vediamo che e' estende e: se $b \in K$ è infinitesimo, sappiamo per ipotesi che e'_μ estende e_μ. Se b è finito, cioè $b = (b - s) + s$ con $b - s \in K \cap \mu$, allora $e'(b) = e'_\mu(b - s) + s = e(b - s) + e(s) = e(b)$. La verifica è simile per b infinito.
Per mostrare che e' è una $\mathcal{L}^D_{\text{an}}$-immersione, resta da verificare che per ogni simbolo di funzione analitica troncata f_r per ogni $\bar{b} \in K\langle a\rangle^n$ vale $e'(f_r(\bar{b})) = f_r(e'(\bar{b}))$.
Fissiamo allora f, r, e siano $b_1, \dots, b_n \in K\langle a\rangle$. Se esiste un $i < n$ per cui $|b_i| > r$ allora $f_r(\bar{b}) = 0$. Naturalmente si ha $e'(f_r(\bar{b})) = 0$, ma anche $|e'(b_i)| > e'(r) = r$ (dato che e' preserva l'ordine), per cui $f_r(e'(\bar{b})) = 0$ sempre perché f_r è troncata.
Supponiamo allora che per $i = 1, \dots, n$ valga $|b_i| < r$, poniamo $b_{n+1} = f(b_1, \dots, b_n)$ e scriviamo $b_i = c_i + s_i$ con $s_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mu$ per $i = 1, \dots, n + 1$. Osserviamo che s_{n+1} e c_{n+1} sono ben definiti perché f_r è una funzione limitata, perciò b_{n+1} non può essere infinito.
Inoltre, chiaramente $|s_i| < r$ per ogni i, per cui la funzione f converge in $\bar{s}$. Possiamo definire una funzione analitica $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1 + s_1, \dots, x_n + s_n) - x_{n+1} - s_{n+1}$. Questa allora converge in un certo intorno di 0, cioè esiste un certo $\varepsilon > 0$ per cui T^D_{an} dimostra

$$g_\varepsilon(x_1, \dots, x_{n+1}) = f_{r+\varepsilon}(x_1 + s_1, \dots, x_n + s_n) - x_{n+1} - s_{n+1}.$$

Per definizione di g vale $g_\varepsilon(c_1, \ldots, c_{n+1}) = 0$, ovvero

$$\begin{aligned}
0 &= g_\varepsilon(e'_\mu(c_1), \ldots, e'_\mu(c_{n+1}) = \\
&= f_{r+\varepsilon}(e'_\mu(c_1) + s_1, \ldots, e'_\mu(c_n) + s_n) - e'_\mu(c_{n+1}) - s_{n+1} = \\
&= f_{r+\varepsilon}(e'(b_1), \ldots, e'(b_n)) - e'(b_{n+1}) = \\
&= f_r(e'(b_1), \ldots, e'(b_n)) - e'(b_{n+1}).
\end{aligned}$$

La terza uguaglianza vale per la definizione di e'; la quarta perché $|e'(b_i)| < r$ in quanto e' preserva l'ordine; l'uguaglianza tra 0 e l'ultima espressione era ciò che volevamo dimostrare.

□

Grazie al Corollario 3.21 e al lemma appena dimostrato, applicando il criterio per l'eliminazione dei quantificatori del primo capitolo (teorema 1.34), segue il

Teorema 3.23. *T^D_{an} elimina i quantificatori.*

Capitolo 4

Gli insiemi semialgebrici e subanalitici

In questo capitolo vogliamo studiare alcune applicazioni dei risultati di eliminazione dei quantificatori per le teorie T_{RCF} e T^D_{an} che abbiamo dimostrato nel capitolo precedente. Le applicazioni riguardano la geometria algebrica e quella analitica: studieremo delle particolari classi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ detti "semialgebrici" o "subanalitici". Si tratta di sottoinsiemi che possono essere descritti tramite sistemi di equazioni e disequazioni in cui compaiono polinomi (nel primo caso) o anche funzioni analitiche (nel secondo caso). L'utilizzo dei linguaggi $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ e $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$ permette di tradurre queste descrizioni in formule del primo ordine: in questo modo, le classi di insiemi che studiamo sono gli insiemi definibili (da certe formule con parametri) in $\bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$. Ciò permette di dimostrare proprietà geometriche degli insiemi passando per le formule del primo ordine da cui questi sono definiti, e quindi di vedere problemi geometrici dal punto di vista della logica.

4.1 Insiemi semialgebrici

La prima famiglia di insiemi che studiamo è quella dei *semialgebrici*. Per questi insiemi esiste una teoria già abbastanza sviluppata in geometria algebrica; vediamone qualche proprietà.

Definizione 4.1. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *semialgebrico* se si scrive come un'unione finita di insiemi della forma

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) = 0, g_1(\bar{x}) > 0, \dots, g_k(\bar{x}) > 0\}$$

con $f, g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}[\bar{x}]$.

Osservazione 4.2. Equivalentemente, si può definire un insieme semialgebrico come un insieme definibile senza quantificatori in $\bar{\mathbb{R}}$.
Infatti, sicuramente un insieme nella forma sopra è definibile senza quantificatori. Viceversa, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è definibile da φ priva di quantificatori, è possibile porre φ in forma normale disgiuntiva; poi, si trasforma ogni formula atomica $t_1(\bar{x}) > t_2(\bar{x})$ in una formula in cui tutti i termini diversi da 0 si trovano al primo membro (basta considerare $t_1(\bar{x}) - t_2(\bar{x}) > 0$), e si fa lo stesso per $=$ al posto di $>$. A questo punto abbiamo una formula equivalente a φ ma nella forma

$$\bigvee_{i=1}^{I} \big(f_{i,j}(\bar{x}) = 0 \wedge \ldots \wedge f_{i,J_i}(\bar{x}) = 0 \wedge g_{i,1}(\bar{x}) > 0 \wedge g_{i,K_i}(\bar{x}) > 0\big)$$

e ora basta sostituire la congiunzione di uguaglianze con una sola uguaglianza equivalente, ovvero

$$f_{i,j}(\bar{x})^2 + \ldots f_{i,J_i}(\bar{x})^2 = 0.$$

Osservazione 4.3. Avendo dimostrato il Teorema di Tarski possiamo notare che gli insiemi semialgebrici sono in realtà *tutti e soli* gli insiemi definibili in $\bar{\mathbb{R}}$. Come conseguenza:

- Insiemi ottenuti tramite intersezioni, unioni finite, complementi di insiemi semialgebrici sono semialgebrici: la classe $\mathcal{S}_n$ degli insiemi semialgebrici in $\mathbb{R}^n$ è una *algebra di Boole*.

- La chiusura e la frontiera topologica di un insieme semialgebrico sono insiemi semialgebrici. Anche se con una dimostrazione geometrica questo può non essere immediato, invece utilizzando la caratterizzazione come insiemi definibili il risultato è ovvio: sia la chiusura di un insieme che la sua frontiera si possono definire tramite la formulazione nota $\forall \varepsilon \, \exists \delta \ldots$, per cui partendo da un insieme definibile abbiamo ancora un insieme definibile, solo con qualche quantificatore in più. L'eliminazione dei quantificatori garantisce che i quantificatori aggiunti in realtà non costituiscono un problema.

- La proiezione di un insieme semialgebrico $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ in $\mathbb{R}^n$ (tramite la proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ sulle prime n coordinate, che non specificheremo più d'ora in avanti) è semialgebrica.[1] Anche qui, dimostrarlo solo con la geometria algebrica non è immediato, mentre segue subito da Tarski tramite la seguente osservazione: considerare la proiezione di un insieme definibile è equivalente a quantificare esistenzialmente le variabili che scompaiono nella proiezione:

$$A = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \varphi(\bar{x}, \bar{y})\} \implies \pi(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{y} \, \varphi(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Gli insiemi semialgebrici possiedono diverse proprietà di finitezza, che derivano principalmente dall'essere un *sistema di Tarski o-minimale*. Abbiamo definito cos'è un sistema

[1] Questo risultato è spesso noto come Teorema di Tarski-Seidenberg.

di Tarski o-minimale nel primo capitolo, e quanto detto nell'osservazione precedente è praticamente la dimostrazione che i semialgebrici ne sono un esempio. Per quanto riguarda l'o-minimalità, la vedremo più in generale per i modelli di T_{an} nel paragrafo seguente. Da qui si ottengono quindi per i semialgebrici tutte le proprietà topologiche enunciate nel paragrafo 1.2.

4.2 Insiemi semianalitici e subanalitici

Oltre alla classe dei semialgebrici, è possibile studiare delle famiglie di insiemi più estese, che facciano uso non solo delle operazioni algebriche ma siano descritte anche per mezzo di funzioni analitiche.

Definizione 4.4. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *semianalitico in un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste $U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x tale che $A \cap U$ se si scrive come un'unione finita di insiemi della forma

$$\{\bar{x} \in U \mid f(\bar{x}) = 0, g_1(\bar{x}) > 0, \ldots, g_k(\bar{x}) > 0\} \tag{4.1}$$

con $f, g_1, \ldots, g_k$ analitiche in U.
A si dice *semianalitico* se è semianalitico in x per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Per verificare che A sia semianalitico, basta verificare che lo sia in $x \in \overline{A}$, in generale non basta controllare soltanto $x \in A$.

Osservazione 4.5. Un insieme della forma (4.1) è, equivalentemente, una combinazione booleana (cioè è ottenuto tramite unioni, intersezioni finite, complementi) di insiemi della forma $\{g(\bar{x}) > 0\}$. Infatti, basta sostituire l'espressione $f(\bar{x}) = 0$ con la congiunzione equivalente $\neg(f(\bar{x}) > 0) \wedge \neg(-f(\bar{x}) > 0)$, che non fa uso del simbolo di uguaglianza.
Da questo segue subito che anche la famiglia degli insiemi subanalitici è una *algebra di Boole*.

Esempio 4.6.

- Consideriamo il grafico dell'esponenziale $\Gamma_{\exp} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$. L'insieme $\Gamma_{\exp}$ è semianalitico in ogni punto (basta prendere $U = \mathbb{R}^2$).
  In generale, si può sostituire exp con una qualsiasi funzione analitica.
- Se $f \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$ converge su un aperto contenente $[-r, r]^n$, allora $\Gamma_{f,r} = \{(\bar{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\bar{x}| \leq r, y = f(\bar{x})\}$ è semianalitico, poiché la condizione $|\bar{x}| \leq r$ si scrive come $g_{1,i}(\bar{x}) = r - x_i > 0, g_{2,i}(\bar{x}) = r + x_i > 0$.

Vediamo invece un esempio di insieme che *non* è semianalitico.

Esempio 4.7 (Osgood, 1910)**.** Consideriamo il seguente insieme:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1 \ \wedge \ \exists t\, (|t| \leq 1 \wedge y = xt \wedge z = xe^t).\}$$

Si tratta del "cono" ottenuto collegando tramite segmenti i punti del grafico di $z = e^y$ (ristretto a $[-1,1]$), presi sul piano $x = 1$, al punto $(0,0,0)$, e prolungando le rette che collegano il grafico al punto.

Mostriamo che C non è semianalitico in 0. Se lo fosse, esisterebbe un intorno $U \ni 0$ per

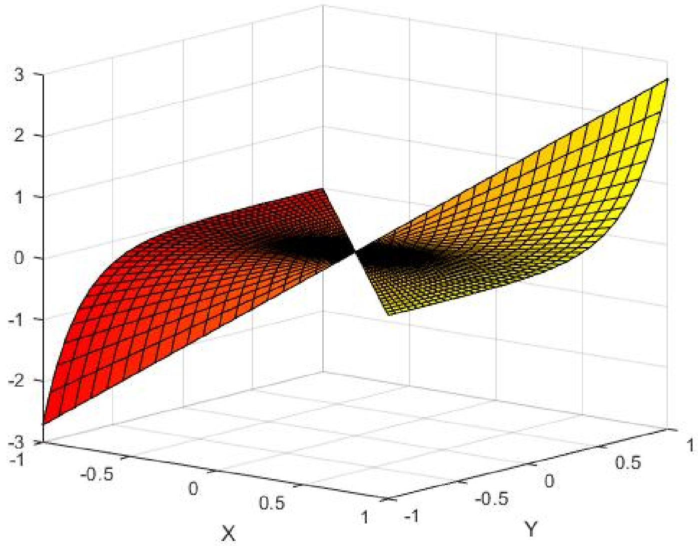


Figura 4.1: Rappresentazione tridimensionale dell'insieme C.

cui un punto $(x,y,z) \in C \cap U$ se e solo se soddisfa

$$f(x,y,z) = 0, g_1(x,y,z) > 0, \dots, g_k(x,y,z) > 0.$$

Le condizioni $g_i > 0$ definiscono un aperto, per cui a meno di restringere U posso supporre che siano sempre soddisfatte. Trovo allora una $f \in \mathbb{R}\{x,y,z\}$, $f \not\equiv 0$, tale che $f(x, xy, xe^y) = 0$ per x, y sufficientemente vicini a 0.

Dal momento che f è analitica ne possiamo scrivere lo sviluppo in serie, nella forma

$$f(x,y,z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n(x,y,z)$$

con h_n polinomi omogenei di grado n.

Valutando in (x, xy, xe^y) scriviamo, vicino a 0,

$$0 \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n(x, xy, xe^y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n h_n(1, y, e^y)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per l'omogeneità di h_n. Abbiamo ottenuto lo sviluppo in serie rispetto a x di $g(x,y) = f(x, xy, xe^y)$, ma dato che questa funzione è costantemente nulla vicino a 0, allora ogni polinomio h_n deve essere a sua volta nullo. Le funzioni y e e^y sono algebricamente indipendenti, per cui bisognerebbe avere $h_n \equiv 0$ per ogni n, e questo è assurdo perché avevamo supposto $f \not\equiv 0$.

Proposizione 4.8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora A è semianalitico se e solo se $A \cap [-r,r]^n$ è definibile senza quantificatori in $\mathbb{R}_{\text{an}}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Fissiamo A semianalitico. Per ogni punto $\bar{x} \in [-r,r]^n$ esiste un intorno $U_{\bar{x}} \ni \bar{x}$ per cui $A \cap U_{\bar{x}}$ si scrive nella forma (4.1). In sostanza, è fatto da tutti e soli i punti di $U_{\bar{x}}$ che soddisfano una certa combinazione booleana di formule $g(\bar{y}) > 0$, cioè una $\mathcal{L}_{\text{an}}$-formula senza quantificatori.
A meno di restringere l'intorno, posso supporre che anche l'intorno $U_{\bar{x}}$ abbia una forma particolarmente semplice, ad esempio quella di un cubo aperto $\bar{x} + (-\varepsilon, \varepsilon)^n$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Notiamo che in tal caso la condizione $\bar{y} \in U_{\bar{x}}$ è esprimibile senza quantificatori in $\mathcal{L}_{\text{an}}$ con

$$\bigwedge_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \varepsilon$$

per cui l'insieme $A \cap U_{\bar{x}}$ è fatto da tutti e soli gli $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ per cui vale la congiunzione tra la condizione $\bar{y} \in U_{\bar{x}}$ e le condizioni che definiscono $A \cap U_{\bar{x}}$.
Per compattezza di $[-r,r]^n$, basta un numero finito di questi aperti $U_{\bar{x}_1}, \ldots, U_{\bar{x}_k}$ per ricoprire $[-r,r]^n$, quindi $A \cap [-r,r]^n = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap U_{\bar{x}_i})$ è definibile dalla disgiunzione delle corrispondenti $\mathcal{L}_{\text{an}}$-formule.
Viceversa, supponiamo che per ogni $r \in \mathbb{R}_{>0}$ l'insieme $A \cap [-r,r]^n$ sia definibile in $\mathcal{L}_{\text{an}}$, e fissiamo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Scegliamo r in modo che $|\bar{x}| < r$. Per ipotesi vale

$$A \cap [-r,r]^n = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \mid \bigvee (t_i(\bar{y}) = 0 \wedge \bigwedge (s_{ij}(\bar{y}) > 0))\}$$

con t_i, g_{ij} termini di $\mathcal{L}_{\text{an}}$. Possiamo supporre che nessuno dei termini in gioco sia identicamente nullo su $\mathbb{R}^n$, per cui i termini t_i, g_{ij} sono in realtà funzioni analitiche convergenti su qualche aperto U_i, V_{ij} e troncate a 0 fuori da un compatto contenuto nell'aperto corrispondente. Senza perdita di generalità possiamo supporre che, per ognuno di questi compatti, $\bar{x}$ non vi appartenga, oppure che sia nella parte interna (ogni compatto K contenuto in un aperto U può essere ingrossato di una certa quantità). Dunque si trova un intorno $U \ni \bar{x}$ su cui i termini in gioco sono identicamente nulli o sono funzioni analitiche non troncate, e da qui segue subito una scrittura di $A \cap U$ nella forma voluta. □

Da quanto appena dimostrato si vede subito che la famiglia degli insiemi semianalitici è stabile per unioni e intersezioni finite e per passaggio al complementare.

Dall'esempio 4.7, invece, si vede che gli insiemi semianalitici non sono stabili per proiezione, cioè se $n, m \in \mathbb{N}, \pi \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ è la proiezione sulle prime n coordinate e $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ è semianalitico, non è detto che lo sia anche $B = \pi(A) \subseteq \mathbb{R}^n$. Per questo introduciamo la seguente

Definizione 4.9. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *subanalitico in un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste un suo intorno U tale che $A \cap U = \pi(S)$ con $S \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ semianalitico *limitato*, π proiezione

canonica.
A si dice *subanalitico* se lo è in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 4.10. Tutti gli insiemi semianalitici sono subanalitici, anche se non limitati: infatti, dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ semianalitico, $x_0 \in A$ e $U = x_0 + [-\varepsilon, \varepsilon]^n$, l'insieme $A \cap U$ è ancora semianalitico ma limitato, e la condizione della subanaliticità (che è locale) è ancora soddisfatta.
L'ipotesi di limitatezza su S nella definizione sopra serve a conservare delle buone proprietà di finitezza almeno sui subanalitici limitati, come l'o-minimalità, che vedremo nel Corollario 4.25. (Notiamo che i subanalitici in generale non sono o-minimali: ad esempio, il grafico del seno è semianalitico ma ha un luogo di zeri discreto e infinito.)

Esempio 4.11. Sia $S = \{(1/n, n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \mathbb{R}^2$, π la proiezione sulla prima coordinata. L'insieme S è semianalitico, perché è fatto di punti isolati (cioè, praticamente, è localmente un punto). Tuttavia $\pi(S) = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ è composto da una quantità numerabile di punti isolati, dunque non si può scrivere come unione finita di intervalli e punti.

Si può verificare che la famiglia dei subanalitici è stabile per intersezioni e unioni finite. Inoltre, anche per i subanalitici vale la stabilità per passaggio al complementare, sebbene dimostrarlo non sia altrettanto facile che per i semianalitici.

Teorema 4.12 (Gabrielov, 1968). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ subanalitico. Allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ è subanalitico.*

Vale il seguente fatto, dimostrato in [bib:Lojasiewicz] con strumenti dell'analisi.

Fatto 4.13. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n = 1$ oppure $n = 2$. Allora A è subanalitico se e solo se è semianalitico.*

Data $\pi \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ mappa di proiezione, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ subanalitico *limitato*, allora $\pi(A)$ è ancora subanalitico. Non è vero in generale se non supponiamo A limitato, come abbiamo visto nell'esempio 4.11.

Nei teoremi e nelle definizioni che seguiranno, utilizzeremo la seguente funzione:

$$\Phi = \Phi_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1 + x_n^2}} \right).$$

Sebbene dipenda da $n \in \mathbb{N}$, scriveremo sempre per semplicità Φ dato che non ci sarà ambiguità. La funzione Φ è una funzione iniettiva che mappa $\mathbb{R}^n$ nella parte interna del cubo compatto $[-1, 1]^n$. Anzi, Φ è una funzione semialgebrica, ed è un isomorfismo analitico tra $\mathbb{R}^n$ e $(-1, 1)^n$.

Definizione 4.14. Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è *finitamente subanalitico* se $\Phi(A)$ è subanalitico.

Osservazione 4.15. Tutti gli insiemi finitamente subanalitici sono subanalitici. Infatti, se A è finitamente subanalitico, con le notazioni sopra si ha $\Phi(A) \cap U = \pi(S)$. Allora $A \cap \Phi^{-1}(U) = \Phi^{-1}(S)$, che è ancora semianalitico limitato.
Per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ limitati, essere finitamente subanalitici è equivalente ad essere subanalitici.

Definizione 4.16. Diciamo che una funzione $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è semianalitica (risp. subanalitica, finitamente subanalitica) se il suo grafico $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ è semianalitico (risp. subanalitico, finitamente subanalitico).

Esempio 4.17.

- Sono finitamente subanalitiche tutte le funzioni analitiche ristrette (troncate), ovvero le funzioni del tipo $f \cdot \mathbb{1}_K$, con $f \in \mathbb{R}\{\bar{x}\}$ convergente in un intorno di 0, $K = [-\varepsilon, \varepsilon]^n$ contenuto nel dominio di convergenza della f (in realtà, basta che K sia un compatto $\mathcal{L}_{\text{an}}$-definibile contenuto nel dominio, non serve sia proprio un cubo). Infatti, si scrivono come l'unione di $\Gamma_{f,r}$, che abbiamo visto essere semianalitico limitato, e il grafico della funzione costante 0 definita su $\mathbb{R}^n \setminus K$.

- Vedremo che anche $f(x) = \arctan(x)$ e $g(x) = e^{1/(1+x^2)}$ sono finitamente subanalitiche, perché definibili in $\mathbb{R}_{\text{an}}$ a partire da funzioni analitiche ristrette. Quindi, la famiglia che stiamo studiando comprende anche funzioni analitiche definite su tutto $\mathbb{R}^n$ e non troncate.

- Invece non sono finitamente subanalitiche funzioni come exp, sin, sebbene lo siano queste stesse funzioni troncate fuori da $[-r, r]$. Che sin non lo sia si può vedere a posteriori: dimostreremo che la famiglia degli insiemi finitamente subanalitici è o-minimale, mentre il luogo di zeri di sin (definibile a partire da sin, quindi finitamente subanalitico, vedi proposizione 4.20) contiene una quantità numerabile di punti isolati. Invece studieremo il grafico di exp nell'esempio seguente.

Esempio 4.18. Il grafico dell'esponenziale $\Gamma_{\exp} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\right\}$ è subanalitico (perché semianalitico) ma non finitamente subanalitico.
Infatti, se lo fosse,

$$\Phi(\Gamma_{\exp}) = \left\{(x, y) \in (-1, 1)^2 \mid \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right\} = \{(x, y) \in (-1, 1)^2 \mid y = g(x)\}$$

sarebbe subanalitico, dove $g(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)^{-1}$. Poiché $\Phi(\Gamma_{\exp}) \subseteq \mathbb{R}^2$, per il fatto 4.13 sarebbe semianalitico ma non lo è in $(1, 1)$, altrimenti si troverebbe un intervallo $V = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ e una funzione analitica su V che coincide con g, assurdo poiché g non si estende analiticamente in 1 (infatti, lo sviluppo di Taylor di g per $x \to 1^-$ non coincide con g per $x \in (1 - \varepsilon, 1)$).
Intuitivamente, ciò che un insieme A finitamente subanalitico ha in più rispetto a uno subanalitico è il fatto che $\Phi(A)$ sia subanalitico anche nel bordo del cubo $[-1, 1]^n$, cosa che

si può pensare come l'essere subanalitico anche "a ∞". In pratica, a meno di applicare Φ (che, ricordiamo, è iniettiva e semialgebrica), possiamo pensare che i finitamente subanalitici coincidano con i subanalitici limitati.

Vogliamo cercare di riformulare il teorema di Gabrielov collegandolo allo studio di modelli di T_{an}. Mentre il teorema di Gabrielov afferma la stabilità per complementare della famiglia dei subanalitici, vedremo che la model-completezza di $\mathbb{R}_{\text{an}}$ corrisponde alla stabilità per complementare dei *finitamente* subanalitici. In realtà i due risultati seguono l'uno dall'altro, come mostra la seguente:

Proposizione 4.19. *Sia $\mathcal{S}_{\text{an}}$ la famiglia dei sottoinsiemi subanalitici di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{FS}$ quella dei sottoinsiemi finitamente subanalitici. La stabilità per passaggio al complementare di $\mathcal{S}_{\text{an}}$ e quella di $\mathcal{FS}$ sono equivalenti (e vere).*

Dimostrazione. Supponiamo di sapere che $\mathcal{S}_{\text{an}}$ è chiusa per complementare, e sia $A \in \mathcal{FS}, B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Applicando Φ, sappiamo che $\Phi(A) \in \mathcal{S}_{\text{an}}$, per cui anche $B' = \mathbb{R}^n \setminus \Phi(A) \in \mathcal{S}_{\text{an}}$. Inoltre, vale $\Phi(B) = (-1,1)^n \setminus \Phi(A) = (-1,1)^n \cap B' \in \mathcal{S}_{\text{an}}$, cioè $B \in \mathcal{FS}$ come voluto.

Viceversa, supponiamo di sapere che $\mathcal{FS}$ sia chiusa per complementare, e fissiamo $A \in \mathcal{S}_{\text{an}}$, $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Per verificare $B \in \mathcal{S}_{\text{an}}$, basta mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vale $x_0 + [-1,1]^n \in \mathcal{S}_{\text{an}}$. Ma quest'ultimo è limitato, quindi basta provare l'appartenenza a $\mathcal{FS}$, che si ottiene ragionando come sopra e osservando che vale $A \cap (x_0 + [-1,1]^n) \in \mathcal{FS}$. □

Qui vediamo un analogo della Proposizione 4.8, con cui continuiamo con una corrispondenza tra insiemi con certe caratteristiche analitico-geometriche e insiemi definibili in un determinato linguaggio.

Proposizione 4.20. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è finitamente subanalitico se e solo se è definibile da una formula esistenziale in $\mathbb{R}_{\text{an}}$.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ finitamente subanalitico. Allora $A = \Phi^{-1}(B)$, con B subanalitico limitato. La condizione $\bar{x} = \Phi(\bar{y})$ si può scrivere tramite una $\mathcal{L}_{\text{an}}$-formula priva di quantificatori. Se mostriamo che B è definibile tramite una formula esistenziale, allora in $A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{y}\, \bar{x} = \Phi(\bar{y}) \wedge \bar{y} \in B\}$ si ha la formula esistenziale cercata (per comodità abbiamo scritto $\bar{y} \in B$ al posto della vera formula che definisce B). Ma B è subanalitico e contenuto in $[-1,1]^n$. Ciò significa che localmente si scrive come proiezione di un semianalitico limitato S. Quest'ultimo è definibile senza quantificatori, per la Proposizione 4.8, e la scrittura come proiezione introduce dei quantificatori esistenziali. Segue che B è definibile esistenzialmente come voluto, quindi anche A.

Dimostriamo adesso il viceversa. Sia A definibile da una $\mathcal{L}_{\text{an}}$-formula esistenziale. Mettiamo tale formula in forma normale prenessa: un blocco di quantificatori esistenziali seguito da una formula senza quantificatori, che supponiamo in forma normale disgiuntiva. Possiamo fare in modo che in questa formula esistenziale non appaiano termini composti, come già fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.6: ad esempio, al posto di ogni sottoformula del tipo "$f(t_1(\bar{x}), \ldots, t_k(\bar{x})) = 0$" scriviamo

$$\exists z_1, \ldots, z_k \, (t_1(\bar{x}) = z_1 \wedge \cdots \wedge t_k(\bar{x}) = z_k \wedge f(z_1, \ldots, z_k) = 0)$$

e procediamo ricorsivamente sui sottotermini t_i per assicurarci che nelle forma normale congiuntiva compaiano soltanto formule del tipo $f_r(\bar{z}) = \bar{y}$ oppure $p(\bar{z}) = 0$, $p(\bar{z}) > 0$ con p polinomi.
Vogliamo studiare com'è fatto $B = \Phi(A)$, che si ottiene rimpiazzando ogni variabile x con $x/\sqrt{1+x^2}$. Ragionando come sopra, si può ottenere una formula equivalente in cui questi radicali non compaiono, al prezzo di aggiungere altri polinomi.
Dopo queste manipolazioni, l'insieme A è definito dalla formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ data da

$$\exists x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \bigvee_{i \in I} \Big(\bigwedge_{j \in J} f_{j,r_j}(\bar{x}) = x_{n_j} \wedge \; p(\bar{x}) = 0 \wedge \bigwedge_{k \in K} q_k(\bar{x}) > 0 \Big)$$

con p, q_k polinomi, f_{j,r_j} funzioni analitiche ristrette.
Poichè le funzioni analitiche ristrette sono nulle fuori da $[-r_j, r_j]^{n+m}$ e sono limitate, nelle sottoformule "$f_{j,r_j}(\bar{x}) = x_{n_j}$ le variabili si possono considerare limitate in un intervallo compatto. Anche le variabili introdotte in sostituzione di $x/sqrt1 + x^2$ possono essere considerate limitate senza alterare la verità della formula che definisce B.
Dunque, dato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e prendendone un intorno U, l'insieme $B \cap U$ è definito da una $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$-formula esistenziale in cui tutte le variabili in gioco sono limitate. Riformulando, $B \cap U$ è proiezione di un insieme limitato e definibile in $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}$ senza quantificatori, cioè proiezione di un insieme semianalitico limitato, che è ciò che volevamo dimostrare. □

La dimostrazione della proposizione appena vista non utilizza la model-completezza di $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$. Tuttavia, assumendola, dato quanto appena dimostrato, possiamo concludere il seguente fatto.

Proposizione 4.21. *I sottoinsiemi definibili di $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ sono tutti e soli quelli finitamente subanalitici.*

Grazie a questa traduzione tra sottoinsiemi di R^n e formule, sapendo il Teorema di Gabrielov (Teorema 4.12) otteniamo una dimostrazione alternativa di:

Corollario 4.22. *La teoria T_{an} è model-completa.*

Dimostrazione. Passo 1. Grazie alla Proposizione 4.20 e alla 4.19 possiamo riformulare il Teorema di Gabrielov dicendo che ogni formula universale equivale ad una formula esistenziale.

Infatti, sia $\psi_1(\bar{y})$ data da $\forall \bar{x}\, \psi_0(\bar{x}, \bar{y})$, con ψ_0 senza quantificatori. La formula ψ_1 definisce un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Possiamo scrivere $A = \mathbb{R}^n \setminus B$, dove B è definito dalla formula esistenziale $\neg\psi_1(\bar{y}) \equiv \exists \bar{x}\, \neg\psi_0(\bar{x}, \bar{y})$. Per la [proposizione precedente] l'insieme B è finitamente subanalitico, quindi per [prop prima] lo è anche A, perciò è definibile da una formula esistenziale $\exists \bar{x}\, \varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$. Avendo ottenuto due formule che definiscono lo stesso insieme A, abbiamo

$$\mathbb{R}_{\text{an}} \models \forall \bar{x}\, \psi_0(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \exists \bar{x}\, \varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$$

Allo stesso modo, facendo il percorso inverso, si mostra che ogni formula esistenziale equivale ad una formula universale.

Passo 2. Deduciamo dal passo 1 che ogni $\mathcal{L}_{\text{an}}$-formula equivale ad una formula esistenziale. In generale, fissato un linguaggio $\mathcal{L}$, ogni $\mathcal{L}$-formula si può scrivere in forma normale prenessa, ovvero nella forma

$$\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \cdots \mathcal{Q}_n x_n\, \varphi(\bar{x})$$

dove ogni $\mathcal{Q}_i$ è un quantificatore $\exists$ o $\forall$ e φ è priva di quantificatori.
In pratica, raggruppando i quantificatori uguali consecutivi, tale formula si può scrivere nel modo seguente (a meno di aggiungere quantificatori ridondanti):

$$\exists \bar{x}_{J_1} \forall \bar{x}_{J_2} \cdots \exists \bar{x}_{J_{k-1}} \forall \bar{x}_{J_k}\ \varphi(\bar{x}) \tag{4.2}$$

dove $x_{J_1} = (x_1, \ldots, x_{j_1})$ per qualche j_1, $x_{J_2} = (x_{j_1+1}, \ldots, x_{j_2})$ e così via.
Ragionando per induzione sul numero di sequenze di quantificatori alternati (il k nell'equazione sopra (4.2)), mostriamo che ogni formula è equivalente a un'altra formula nella forma (4.2) con $k = 1$, cioè a una formula esistenziale o universale. Se c'è un solo gruppo di quantificatori tutti uguali non c'è nulla da dimostrare. Supponendo la tesi vera per $h - 1$ gruppi di quantificatori, Sappiamo dal passo 1 che i quantificatori più interni possono essere trasformati in universali, se esistenziali, e viceversa, per cui il numero di alternanze di quantificatori si riduce di 1 e si può applicare l'ipotesi induttiva.
A questo punto la formula di partenza equivale ad una formula esistenziale (ed in tal caso abbiamo finito) o una universale. Nell'ultimo caso, usando di nuovo il passo 1, otteniamo ancora l'equivalenza con una formula esistenziale come voluto. □

Osservazione 4.23. In realtà la stabilità per complementare della famiglia degli insiemi subanalitici e la model-completezza di T_{an} sono equivalenti: abbiamo visto una delle due implicazioni nel Corollario 4.22. Per il viceversa, supponiamo di sapere che T_{an} è model-completa: ogni sua formula equivale ad una esistenziale. Ragionando come nella dimostrazione del Corollario 4.22, deduciamo che se il complementare di un insieme è finitamente subanalitico, allora l'insieme stesso lo è. Infine, usando sempre la Proposizione 4.19, otteniamo il teorema di Gabrielov.

4.3 Proprietà geometriche

In questa sezione, studiamo alcune proprietà interessanti delle famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ studiate prima, utilizzando i teoremi dimostrati su $\mathcal{L}_{\text{an}}$.

Proposizione 4.24. *Sia $t(x)$ un $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$-termine in una variabile. Indichiamo con t anche la corrispondente funzione $x \mapsto t(x)$ in $\mathbb{R}_{\text{an}}^D$. Esiste un $\varepsilon > 0$ per cui si verifica uno dei seguenti due casi:*

1. *$t(x)$ è identicamente nullo su $(0, \varepsilon)$*
2. *esiste un $n \in \mathbb{Z}$ e una $f \in \mathbb{R}\{x\}$ convergente su $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e non nulla in 0, per cui valga $f(x) = x^n f(x)$ per ogni $x \in (0, \varepsilon)$.*

Dimostrazione. Per brevità, in questa proposizione come più avanti, scriviamo "in 0^+" anziché "esiste un ε per cui ... su $(0, \varepsilon)$".

- Se $t(x) = x$ oppure $t(x) = c$ costante, allora la tesi è ovvia.
- Se la tesi è vera per t_1 e t_2, vedere che è vera anche per $t_1 \pm t_2$ e per $t_1 \cdot t_2$ è una facile verifica.
- Se vale la tesi per t_1 e t_2 allora vale per $D(t_1, t_2)$. Infatti, se almeno uno si trova nel caso 1, allora anche $D(t_1, t_2)$ si trova in questo caso. Se invece entrambi si trovano nel caso 2 allora $t_1(x) = x^n f(x), t_2(x) = x^m g(x)$, e possiamo scegliere un intorno di 0 abbastanza piccolo in modo che $g(x) \neq 0$ in 0^+. Allora vicino a 0 vale $D(t_1, t_2)(x) = x^{n-m}(f/g)(x)$, con f/g ben definita e non nulla in 0.
- Supponiamo adesso che la tesi valga per $t_1, \ldots, t_k$ e prendiamo f_r un simbolo di funzione analitica ristretta di $\mathcal{L}_{\text{an}}^D$. Vogliamo studiare il termine

$$f_r(x) = \begin{cases} f(t_1(x), \ldots, t_k(x) & \text{se } |t_i(x)| \leq r \text{ per } i = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Se vale il caso 1 per uno dei termini, possiamo non considerarlo e ridurre n. Allora, senza perdita in generalità, supponiamo che tutti i termini siano nel caso 2, per cui si ha $t_i(x) = x^{n_i} f_i(x)$ in 0^+. Possiamo supporre che valga anche $f_i(x) \in (f_i(0)/2, 2f_i(0))$ in 0^+, a meno di restringerci. Fatte queste ipotesi, se $n_i < 0$ per qualche i, avendo limitato $f_i(x)$ si ha che il termine t_i esplode, cioè $|t_i(x)| > r$ abbastanza vicino a 0, per cui il termine composto è identicamente nullo vicino a 0 (è nel caso 1). Supponiamo allora $n_i \geq 0$ per tutti gli i.
  Dal secondo punto, anche i termini $t_i(x) \pm r$ hanno segno costante in 0^+. Se $t_i(x) - r > 0$

oppure $t_i(x) + r < 0$ allora il termine composto si trova nel caso 1. Altrimenti si ha per ogni i che $-r \leq t_i(x) \leq r$ per in 0^+.
Definiamo $a_i = [x^{n_i} f_i(x)]_{x=0}$. Per continuità, vale $-r \leq a_i \leq r$, per cui il punto $(a_1, \dots, a_n)$ è contenuto nel dominio di f_r in cui questa funzione non è troncata. Basta questo per dire che la funzione $f(t_1(x), \dots, t_k(x))$, avendo almeno un punto nel suo dominio di convergenza, è una ben definita funzione analitica g, per cui possiamo scrivere $f(t_1(x), \dots, t_k(x)) = g(x)$ vicino a 0. Raccogliendo la minima potenza di x con coefficiente non nullo nello sviluppo in serie di g, si ottiene una scrittura come quella del caso 2, perciò si ha la tesi anche in questo caso.

□

Corollario 4.25. *La teoria T^D_{an} è o-minimale.*

Dimostrazione. Passo 1. Dimostriamo che, per ogni termine $t(x)$ di $\mathcal{L}^D_{\mathrm{an}}$, esiste una partizione finita di $\mathbb{R}$ in intervalli e punti tale che su ogni intervallo $t(x)$ abbia segno costante.
Utilizziamo la proposizione appena dimostrata. Dato $a \in \mathbb{R}$, applichiamola a $t(a+x), t(a-x)$. Otteniamo che esiste un $\varepsilon_a > 0$ per cui $t(x)$ ha segno costante su $(a, a+\varepsilon_a)$ e su $(a-\varepsilon_a, a)$. Analogamente, applicando la proposizione a $t(D(1,x)), t(-D(1,x))$, vediamo che esiste $\eta > 0$ tale che $t(x)$ abbia segno costante su $(1/\eta, \infty)$ e su $(-\infty, -1/\eta)$.
Per compattezza, l'intervallo $[-1/\eta, 1/\eta]$ è ricoperto da un numero finito di sottointervalli della forma $(a, a+\varepsilon_a)$, $(a-\varepsilon_a, a)$, e da questo segue la tesi.
Passo 2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ definibile in $\mathbb{R}^D_{\mathrm{an}}$. Allora A è definibile senza quantificatori, cioè si scrive come unione finita di insiemi della forma

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid t_0(\bar{x}) = 0, t_1(\bar{x}) > 0, \dots, t_k(\bar{x}) > 0\} \tag{4.3}$$

con t_i termini di $\mathcal{L}^D_{\mathrm{an}}$. Usando il punto 1 e se necessario raffinando la partizione, otteniamo una partizione finita di $\mathbb{R}$ in intervalli e punti tale che su ciascuno degli intervalli ognuno dei termini t_i ha segno costante, per cui la condizione 4.3 definisce un'unione finita di alcuni di questi intervalli e punti. Da qui si ha la tesi. □

Corollario 4.26. *La teoria T_{an} è o-minimale.*

Dimostrazione. Il grafico della funzione D della struttura $\mathbb{R}^D_{\mathrm{an}}$ e il suo complemento si possono definire in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$: lo abbiamo visto nell'Osservazione 3.5. Ciò significa, in particolare, che ogni insieme definibile in $\mathbb{R}^D_{\mathrm{an}}$ è già definibile in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$, e ovviamente vale il viceversa. Poiché tutti i sottoinsiemi $\mathbb{R}^D_{\mathrm{an}}$-definibili in $\mathbb{R}$ sono unione finita di intervalli e punti, lo stesso vale per $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$. □

Nel seguito lavoriamo con un linguaggio espanso con ulteriori simboli, per dimostrare la limitatezza polinomiale di T_{an}. Come il simbolo D, anche gli altri simboli che aggiungiamo saranno dei simboli definibili nella struttura di partenza, per cui gli insiemi e le funzioni definibili con i nuovi simboli sono tutti e soli quelli definibili già prima.
Vediamo intanto una proposizione che giustifica lo studio di come sono fatti i termini di un linguaggio per ottenere informazioni sulle sue funzioni definibili.

Proposizione 4.27. *Sia T una $\mathcal{L}$-teoria che elimina i quantificatori ed ammette una assiomatizzazione universale, e $\mathcal{M} \models T$. Allora, ogni funzione $\mathcal{M}$-definibile $f\colon M^n \to M$ è descritta da termini a tratti, ovvero: esistono $\mathcal{L}$-termini $t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_k(x_1, \dots, x_n)$ tali che per ogni $a \in M^n$ si ha $f(a) = t_i(a)$ per qualche i.*

Osservazione 4.28. In realtà in questo teorema basta che T sia model-completa, non è necessario che elimini i quantificatori.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi non sia vera, cioè che esista una f per cui, dati $t_1, \dots, t_k$ termini del linguaggio, esiste almeno un punto $\bar{x} \in M^n$ per cui $f(\bar{x}) \neq t_i(\bar{x})$ qualunque sia i.
Sia $\varphi(\bar{x}, y)$ la formula che definisce "$f(\bar{x}) = y$". Allora l'insieme delle formule

$$\mathcal{S}(\bar{x}) = \{\neg\varphi(\bar{x}, t(\bar{x})) \mid t \text{ un termine}\}$$

è finitamente soddisfacibile. Esiste [per un fatto non detto] $M' \models T$ che contiene una realizzazione $\bar{a}$ del tipo $\mathcal{S}(\bar{x})$.
Consideriamo $N \subseteq M'$ la sottostruttura di M' generata da $\bar{a}$ nel linguaggio $\mathcal{L}$. Per [il fatto sulle assiomatizzazioni universali non ancora scritto], anche N è un modello di T. Per eliminazione dei quantificatori (basta la model-completezza, in effetti) si ha $N \prec M$. Tuttavia, si ha

$$N \models \forall y \neg\varphi(\bar{a}, y)$$

perché gli elementi di N sono proprio i termini dipendenti da $\bar{a}$; ma vale anche

$$M \models \forall \bar{x} \exists y \, \varphi(\bar{x}, y)$$

perché f è una funzione. Questo è assurdo poiché N ed M dovrebbero soddisfare gli stessi enunciati del primo ordine, mentre i due enunciati visti sono contraddittori. □

Adesso costruiamo il nuovo linguaggio che rispetti le ipotesi del teorema qui sopra. Sappiamo già che T_{an}^D elimina i quantificatori. Quello che ci serve allora è il seguente

Teorema 4.29. *Sia $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^r$ l'espansione di $\mathcal{L}_{\mathrm{an}}^D$ ottenuta aggiungendo i simboli $\sqrt[n]{\ }_{n\in\mathbb{N}}$ e T_{an}^r la teoria che estende T_{an}^D con gli assiomi che definiscono i nuovi simboli:*

$$(x > 0 \to ((\sqrt[n]{x})^n = x \wedge \sqrt[n]{x} > 0) \wedge (x \leq 0 \to \sqrt[n]{x} = 0).$$

Questa estensione di T_{an} ammette una assiomatizzazione universale.

Vogliamo dunque capire come sono fatti i termini di questo nuovo linguaggio.

Teorema 4.30. *Sia $t(x)$ un termine di $\mathcal{L}^r_{\text{an}}$. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ per cui si verifica uno dei seguenti casi:*

1. *$t(x)$ è identicamente nullo su $(0, \varepsilon)$*
2. *esistono un $r_0, \ldots, r_k \in \mathbb{Q}, r_1, \ldots, r_k > 0$ e una $F \in \mathbb{R}\{y_1, \ldots, y_k\}$ non nulla in 0, per cui valga $t(x) = x^{r_0} F(x^{r_1}, \ldots, x^{r_k})$ per ogni $x \in (0, \varepsilon)$.*

Dimostrazione. Come prima, scriviamo "in 0^+" per indicare che esiste un ε abbastanza piccolo per cui vale una certa proprietà in $(0, \varepsilon)$.
Facciamo una dimostrazione per induzione sulla complessità dei termini. I casi $t(x) \equiv 0$ e $t(x) = x$ sono ovvi. Si vedono facilmente anche i casi $t = -t_1$, $t = t_1 + t_2$ e $t = t_1 \cdot t_2$.
Vediamo il caso $t = \sqrt[n]{t_1}$, con t_1 termine di complessità inferiore. Supponiamo che t non si annulli in 0^+. Allora t_1 deve essere positivo in 0^+. Per ipotesi induttiva, $g(x) = x^{u_0} G(x^{u_1}, \ldots, x^{u_k})$ nella forma richiesta. Quindi $t(x) = x^{u_0/n} G(x^{u_1}, \ldots, x^{u_k})^{1/n}$, con $G(0) > 0$. Scriviamo allora $G(\bar{y}) = G(0)(1 + H(\bar{y}))$, con H analitica in 0, $H(0) = 0$. Allora in 0^+ si ha $G(x^{u_1}, \ldots, x^{u_k})^{1/n} = F(x^{u_1}, \ldots, x^{u_k})$, dove $F(\bar{y}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} G(0)^j \binom{1/n}{j} H(\bar{y})^j$ è una serie analitica nell'origine, $F(0) = \sqrt[n]{G(0)}$.
Come ultimo caso, supponiamo $t = f_r(t_1, \ldots, t_l)$, dove $t_1, \ldots, t_l$ sono termini di complessità inferiore. Supponendo che t non sia identicamente nullo in 0^+, bisogna avere $|t_i(x)| \leq r$ in 0^+ per $i = 1, \ldots, l$. Inoltre possiamo supporre $t_i(x)$ non identicamente nulla in 0^+: se lo è, basta eliminarlo dall'espressione. Per ipotesi induttiva possiamo scrivere $t_i(x) = x^{r_{i,0}} H_i(x^{r_{i,1}}, \ldots, x^{r_{i k^{(l)}}})$ in 0^+ nella forma solita. Dovendo valere $|t_i(x)| \leq r$, necessariamente abbiamo $r_{i,0} \geq 0$ per ogni i. Rinominando gli $r_{i,j}$ in $s_1, \ldots, s_m$, possiamo scrivere $t(x) = F(x^{s_1}, \ldots, x^{s_m})$ con F analitica in 0. Raccogliendo la giusta potenza di x nella scrittura di F, si ottiene infine una scrittura nella forma voluta. $\square$

Teorema 4.31. *Ogni funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definibile in $\mathcal{L}^r_{\text{an}}$ ammette uno sviluppo di Puiseux convergente a $+\infty$, cioè esistono $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ed elementi $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq m$, $a_m \neq 0$, per cui*

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{-n/d} \tag{4.4}$$

per $x \in (a, +\infty)$ per un certo $a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.27, sappiamo che $f(x) = t(x)$ per ogni $x \in (a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$, t un termine di $\mathcal{L}^r_{\text{an}}$. Consideriamo il termine $t(D(1, x))$ e utilizziamo il Teorema 4.30. Si ha $t(D(1, x)) = x^{r_0} F(x^{r_1}, \ldots, x^{r_k})$ nella forma dell'enunciato dello stesso teorema. Sviluppando F in serie e supponendo che gli r_i abbiano tutti lo stesso denominatore, otteniamo lo sviluppo cercato. $\square$

Corollario 4.32. *La teoria T_{an} è polinomialmente limitata.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.31, ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definibile in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ (quindi definibile in $\mathbb{R}^r_{\mathrm{an}}$) ammette uno sviluppo nella forma (4.4), quindi $f(x) \sim a_m \cdot x^{-m/d}$. $\square$

Osservazione 4.33. Tra le conseguenze del Teorema 4.31 c'è che la funzione $x \mapsto x^r$ non è definibile in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Inoltre, con la limitatezza polinomiale, riusciamo finalmente a mostrare che la funzione esponenziale globale non è definibile in $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ nonostante le sue restrizioni a compatti definibili lo siano.

Un interessante rafforzamento della limitatezza polinomiale in dimensione maggiore di 1, che usa anche l'o-minimalità, dice che una funzione definibile può crescere a $+\infty$ (in una fissata componente) solo in un numero finito di modi.

Teorema 4.34. *Sia $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definibile. Allora esistono $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Q}$ tali che per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f_a(x) = f(a, x)$ sia identicamente nulla o cresca come x^r_i per qualche i.*

Bibliografia

[1] J. Denef e L. van den Dries. “p-adic and Real Subanalytic Sets”. In: *Annals of Mathematics* 128.1 (1988), pp. 79–138. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1971463 (visitato il 27/06/2022).

[2] L. van den Dries. “A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results”. In: *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 15.2 (1986), pp. 189–193. DOI: bams/1183553469. URL: https://doi.org/.

[3] L. van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998. DOI: 10.1017/CBO9780511525919.

[4] A. M. Gabriélov. “Projections of semi-analytic sets”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 2.4 (ott. 1968), pp. 282–291. ISSN: 1573-8485. DOI: 10.1007/BF01075680. URL: https://doi.org/10.1007/BF01075680.

[5] S. Lojasiewicz. “Ensembles semi-analytiques”. In: IHES, 1965.

[6] C. Miller. “Expansions of the real field with power functions”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 68.1 (1994), pp. 79–94. ISSN: 0168-0072. DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(94)90048-5. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168007294900485.

[7] A.J. Wilkie. “Lectures on elimination theory for semialgebraic and subanalytic sets”. In: *O-Minimality and Diophantine Geometry*. A cura di G. O. Jones e A. J.Editors Wilkie. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2015, pp. 159–192. DOI: 10.1017/CBO9781316106839.007.